Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 6

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 6.1. Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} Z & E & I & L & E \\ R & E & I & H & E \\ H & O & R & I & Z \\ O & N & T & A & L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S & E & I \\ P & V & K \\ A & E & A \\ L & R & A \\ T & T & L \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 6.2.*

Berechne über den komplexen Zahlen das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 2-i & -1-3i & -1 \\ i & 0 & 4-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 2+5i \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 6.3. Bestimme das Matrizenprodukt

$$e_i \circ e_j \, ,$$

wobei links der i-te Standardvektor (der Länge n) als Zeilenvektor und rechts der j-te Standardvektor (ebenfalls der Länge n) als Spaltenvektor aufgefasst wird.

Aufgabe 6.4. Es sei M eine $m \times n$-Matrix. Zeige, dass das Matrizenprodukt Me_j mit dem j-ten Standardvektor (als Spaltenvektor aufgefasst) die j-te Spalte von M ergibt. Was ist e_iM, wobei e_i der i-te Standardvektor (als Zeilenvektor aufgefasst) ist?

Aufgabe 6.5. Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 2+i & 1-\frac{1}{2}i & 4i \\ -5+7i & \sqrt{2}+i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5+4i & 3-2i \\ \sqrt{2}-i & e+\pi i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-3i \end{pmatrix}$$

gemäß den beiden möglichen Klammerungen.

Für die folgende Aussage wird sich bald ein einfacher Beweis über die Beziehung zwischen Matrizen und linearen Abbildungen ergeben.

Aufgabe 6.6. Zeige, dasss die Matrizenmultiplikation assoziativ ist.

Genauer: Es sei K ein Körper und es sei A eine $m \times n$-Matrix, B eine $n \times p$-Matrix und C eine $p \times r$-Matrix über K. Zeige, dass $(AB)C = A(BC)$ ist.

Zu einer Matrix M bezeichnet man mit M^n die n-fache Verknüpfung (Matrizenmultiplikation) mit sich selbst. Man spricht dann auch von n-ten *Potenzen* der Matrix.

Aufgabe 6.7. Berechne zur Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

die Potenzen

$$M^i, i = 1, \ldots, 4.$$

Aufgabe 6.8. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Zeige, dass auch das Produkt

$$V \times W$$

ein K-Vektorraum ist.

Aufgabe 6.9. Es sei K ein Körper und I eine Indexmenge. Zeige, dass

$$K^I = \operatorname{Abb}(I, K)$$

mit stellenweiser Addition und skalarer Multiplikation ein K-Vektorraum ist.

Aufgabe 6.10. Man mache sich klar, dass sich die Addition und die skalare Multiplikation auf einen Untervektorraum einschränken lässt und dass dieser mit den von V geerbten Strukturen selbst ein Vektorraum ist.

Aufgabe 6.11. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Beweise folgende Aussagen.

(1) Sei U_j, $j \in J$, eine Familie von Untervektorräumen von V. Dann ist auch der Durchschnitt

$$U = \bigcap_{j \in J} U_j$$

ein Untervektorraum.

(2) Zu einer Familie v_i, $i \in I$, von Elementen in V ist der erzeugte Unterraum ein Unterraum. Er stimmt mit dem Durchschnitt

$$\bigcap_{U \subseteq V \text{ Untervektorraum}, v_i \in U \text{ für alle } i \in I} U$$

überein.

(3) Die Familie v_i, $i \in I$, ist genau dann ein Erzeugendensystem von V, wenn

$$\langle v_i,\, i \in I \rangle = V$$

ist.

Aufgabe 6.12. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. Zeige, dass die Vereinigung $U \cup W$ nur dann ein Untervektorraum ist, wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ gilt.

Aufgabe 6.13. Es sei K ein Körper und

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

ein lineares Gleichungssystem über K. Zeige, dass die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems ein Untervektorraum des K^n ist. Wie verhält sich dieser Lösungsraum zu den Lösungsräumen der einzelnen Gleichungen?

Aufgabe 6.14. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V und $w \in V$ ein weiterer Vektor. Es sei vorausgesetzt, dass die Familie

$$w, v_i, i \in I\,,$$

ein Erzeugendensystem von V ist und dass sich w als Linearkombination der v_i, $i \in I$, darstellen lässt. Zeige, dass dann schon v_i, $i \in I$, ein Erzeugendensystem von V ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 6.15. (3 Punkte)

Berechne über den komplexen Zahlen das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 3-2i & 1+5i & 0 \\ 7i & 2+i & 4-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2i & -i \\ 3-4i & 2+3i \\ 5-7i & 2-i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.16. (4 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über einem Körper K. Zeige, dass die vierte Potenz von M gleich 0 ist, also

$$M^4 = MMMM = 0\,.$$

Aufgabe 6.17. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften gelten (dabei sei $\lambda \in K$ und $v \in V$.)

(1) Es ist $0v = 0$.
(2) Es ist $\lambda 0 = 0$.
(3) Es ist $(-1)v = -v$.
(4) Aus $\lambda \neq 0$ und $v \neq 0$ folgt $\lambda v \neq 0$.

Aufgabe 6.18. (3 Punkte)

Drücke in $\mathbb{Q}^3$ den Vektor

$$(2, 5, -3)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(1, 2, 3), (0, 1, 1) \text{ und } (-1, 2, 4)$$

aus. Zeige, dass man ihn nicht als Linearkombination von zweien der drei Vektoren ausdrücken kann.

Aufgabe 6.19. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen Vektorraum V und von drei Teilmengen in V an, die jeweils zwei der Unterraumaxiome erfüllen, aber nicht das dritte.

Abbildungsverzeichnis