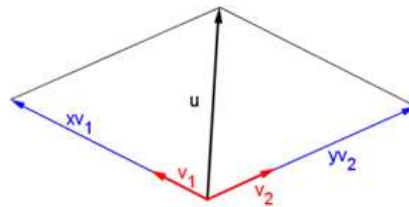


Mathematik für Anwender I

Vorlesung 7

Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems in n Variablen über einem Körper K ist ein Untervektorraum des K^n . Häufig wird dieser Lösungsraum durch die Menge aller „Linearkombinationen“ von endlich vielen (besonders einfachen) Lösungen beschrieben. In dieser und der nächsten Vorlesung entwickeln wir die dazu notwendigen Begriffe.

Erzeugendensysteme



Die von zwei Vektoren v_1 und v_2 erzeugte Ebene besteht aus allen Linearkombination $u = xv_1 + yv_2$.

DEFINITION 7.1. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Es sei v_1, \dots, v_n eine Familie von Vektoren in V . Dann heißt der Vektor

$$s_1v_1 + s_2v_2 + \dots + s_nv_n \text{ mit } s_i \in K$$

eine *Linearkombination* dieser Vektoren (zum *Koeffiziententupel* (s_1, \dots, s_n)).

Zwei unterschiedliche Koeffiziententupel können denselben Vektor definieren.

DEFINITION 7.2. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Dann heißt eine Familie $v_i \in V$, $i \in I$, ein *Erzeugendensystem* von V , wenn man jeden Vektor $v \in V$ darstellen kann als¹

$$v = \sum_{j \in J} s_j v_j$$

mit einer endlichen Teilfamilie $J \subseteq I$ und mit $s_j \in K$.

¹Es bedeutet keinen Verständnisverlust, wenn man hier nur endliche Familien betrachtet. Das Summenzeichen über eine endliche Indexmenge bedeutet einfach, dass alle Elemente der Familie aufzusummieren sind.

Im K^n bilden die Standardvektoren e_i , $1 \leq i \leq n$, ein Erzeugendensystem. Im Polynomring $K[X]$ bilden die Potenzen X^n , $n \in \mathbb{N}$, ein (unendliches) Erzeugendensystem.

DEFINITION 7.3. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Zu einer Familie v_i , $i \in I$, setzt man

$$\langle v_i, i \in I \rangle = \left\{ \sum_{i \in J} s_i v_i \mid s_i \in K, J \subseteq I \text{ endliche Teilmenge} \right\}$$

und nennt dies den von der Familie *erzeugten* oder *aufgespannten Untervektorraum*.

Der von der leeren Menge erzeugte Unterraum ist der Nullraum.² Dieser wird ebenso von der 0 erzeugt. Zu einem einzigen Vektor v besteht der aufgespannte Raum aus $Kv = \{sv \mid s \in K\}$. Bei $v \neq 0$ ist dies eine *Gerade*, was wir im Rahmen der Dimensionstheorie noch präzisieren werden. Bei zwei Vektoren v und w hängt die „Gestalt“ des aufgespannten Raumes davon ab, wie die beiden Vektoren sich zueinander verhalten. Wenn sie beide auf einer Geraden liegen, d.h. wenn gilt $w = sv$, so ist w überflüssig und der von den beiden Vektoren erzeugte Unterraum stimmt mit dem von v erzeugten Unterraum überein. Wenn dies nicht der Fall ist (und v und w nicht 0 sind), so erzeugen die beiden Vektoren eine „Ebene“.

Wir fassen einige einfache Eigenschaften für Erzeugendensysteme und Unterräume zusammen.

LEMMA 7.4. *Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Sei U_j , $j \in J$, eine Familie von Untervektorräumen. Dann ist auch der Durchschnitt³*

$$U = \bigcap_{j \in J} U_j$$

ein Untervektorraum.

- (2) *Zu einer Familie v_i , $i \in I$, von Elementen in V ist der erzeugte Unterraum ein Unterraum⁴ von V .*
 (3) *Die Familie v_i , $i \in I$, ist genau dann ein Erzeugendensystem von V , wenn*

$$\langle v_i, i \in I \rangle = V$$

ist.

²Dies kann man als Definition nehmen oder aber aus der Definition ableiten, wenn man die Konvention berücksichtigt, dass die leere Summe gleich 0 ist.

³Der Durchschnitt $\bigcap_{j \in J} T_j$ zu einer beliebigen Indexmenge J und einer durch J indizierten Familie T_j , $j \in J$, von Teilmengen einer festen Obermenge M besteht aus allem Elementen aus M , die in allen Mengen T_j enthalten sind.

⁴In der Bezeichnung „erzeugter Unterraum“ wurde diese Eigenschaft schon vorweg genommen.

Beweis. Siehe Aufgabe 7.4. □

Lineare Unabhängigkeit

DEFINITION 7.5. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Dann heißt eine Familie von Vektoren $v_i, i \in I$, (mit einer beliebigen endlichen Indexmenge I) *linear unabhängig*, wenn eine Gleichung

$$\sum_{i \in I} s_i v_i = 0 \text{ mit } s_i \in K$$

nur bei $s_i = 0$ für alle i möglich ist.

Wenn eine Familie nicht linear unabhängig ist, so nennt man sie *linear abhängig*. Man nennt übrigens eine Linearkombination $\sum_{i \in I} a_i v_i = 0$ eine *Darstellung des Nullvektors*. Sie heißt die *triviale Darstellung*, wenn alle Koeffizienten a_i null sind, andernfalls, wenn also mindestens ein Koeffizient nicht null ist, spricht man von einer *nichttrivialen Darstellung der Null*. Eine Familie von Vektoren ist genau dann linear unabhängig, wenn man mit ihnen nur auf die triviale Art den Nullvektor darstellen kann. Dies ist auch äquivalent dazu, dass man keinen Vektor aus der Familie als Linearkombination der anderen ausdrücken kann.

LEMMA 7.6. Sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und $v_i, i \in I$, eine Familie von Vektoren in V . Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) Wenn die Familie linear unabhängig ist, so ist auch zu jeder Teilmenge $J \subseteq I$ die Familie $v_i, i \in J$, linear unabhängig.
- (2) Die leere Familie ist linear unabhängig.
- (3) Wenn die Familie den Nullvektor enthält, so ist sie nicht linear unabhängig.
- (4) Wenn in der Familie ein Vektor mehrfach vorkommt, so ist sie nicht linear unabhängig.
- (5) Ein Vektor v ist genau dann linear unabhängig, wenn $v \neq 0$ ist.
- (6) Zwei Vektoren v und u sind genau dann linear unabhängig, wenn weder u ein skalares Vielfaches von v ist noch umgekehrt.

Beweis. Siehe Aufgabe 7.7. □

BEISPIEL 7.7. Die Standardvektoren im K^n sind linear unabhängig. Eine Darstellung

$$\sum_{i=1}^n s_i e_i = 0$$

bedeutet ja einfach

$$s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + s_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

woraus sich aus der i -ten Zeile direkt $s_i = 0$ ergibt.

BEISPIEL 7.8. Die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

sind linear abhängig. Es ist nämlich

$$4 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors.

BEMERKUNG 7.9. Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in K^m$ sind genau dann linear abhängig, wenn das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

eine nichttriviale (d.h. von 0 verschiedene) Lösung besitzt.

Basen

DEFINITION 7.10. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Dann heißt ein linear unabhängiges Erzeugendensystem $v_i \in V, i \in I$, von V eine *Basis* von V .

BEISPIEL 7.11. Die Standardvektoren im K^n bilden eine Basis. Die lineare Unabhängigkeit wurde in Beispiel 7.7 gezeigt. Um zu zeigen, dass auch ein

Erzeugendensystem vorliegt, sei $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n$ ein beliebiger Vektor. Dann

ist aber direkt

$$v = \sum_{i=1}^n b_i e_i.$$

Also liegt eine Basis vor, die man die *Standardbasis* des K^n nennt.

SATZ 7.12. *Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Es sei $v_1, \dots, v_n \in V$ eine Familie von Vektoren. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (1) *Die Familie ist eine Basis von V .*
- (2) *Die Familie ist ein minimales Erzeugendensystem, d.h. sobald man einen Vektor v_i weglässt, liegt kein Erzeugendensystem mehr vor.*
- (3) *Für jeden Vektor $u \in V$ gibt es genau eine Darstellung*

$$u = s_1v_1 + \dots + s_nv_n.$$

- (4) *Die Familie ist maximal linear unabhängig, d.h. sobald man irgendeinen Vektor dazunimmt, ist die Familie nicht mehr linear unabhängig.*

Beweis. Wir führen einen Ringschluss durch. (1) \Rightarrow (2). Die Familie ist ein Erzeugendensystem. Nehmen wir einen Vektor, sagen wir v_1 , aus der Familie heraus. Wir müssen zeigen, dass dann die verbleibende Familie, also v_2, \dots, v_n kein Erzeugendensystem mehr ist. Wenn sie ein Erzeugendensystem wäre, so wäre insbesondere v_1 als Linearkombination der Vektoren darstellbar, d.h. man hätte

$$v_1 = \sum_{i=2}^n s_i v_i.$$

Dann ist aber

$$v_1 - \sum_{i=2}^n s_i v_i = 0$$

eine nichttriviale Darstellung der 0, im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Familie. (2) \Rightarrow (3). Nach Voraussetzung ist die Familie ein Erzeugendensystem, so dass sich jeder Vektor als Linearkombination darstellen lässt. Angenommen, es gibt für ein $u \in V$ eine mehrfache Darstellung, d.h.

$$u = \sum_{i=1}^n s_i v_i = \sum_{i=1}^n t_i v_i,$$

wobei mindestens ein Koeffizient verschieden sei. Ohne Einschränkung sei $s_1 \neq t_1$. Dann erhält man die Beziehung

$$(s_1 - t_1)v_1 = \sum_{i=2}^n (t_i - s_i)v_i.$$

Wegen $s_1 - t_1 \neq 0$ kann man durch diese Zahl dividieren und erhält eine Darstellung von v_1 durch die anderen Vektoren. Nach Aufgabe 7.3 ist auch die Familie ohne v_1 ein Erzeugendensystem von V , im Widerspruch zur Minimalität. (3) \Rightarrow (4). Wegen der eindeutigen Darstellbarkeit besitzt insbesondere der Nullvektor nur die triviale Darstellung, d.h. die Vektoren sind

linear unabhängig. Nimmt man einen Vektor u hinzu, so besitzt dieser eine Darstellung

$$u = \sum_{i=1}^n s_i v_i$$

und daher ist

$$0 = u - \sum_{i=1}^n s_i v_i$$

eine nichttriviale Darstellung der 0, so dass die verlängerte Familie u, v_1, \dots, v_n nicht linear unabhängig ist. (4) \Rightarrow (1). Die Familie ist linear unabhängig, wir müssen zeigen, dass sie auch ein Erzeugendensystem bildet. Sei dazu $u \in V$. Nach Voraussetzung ist die Familie u, v_1, \dots, v_n nicht linear unabhängig, d.h. es gibt eine nichttriviale Darstellung

$$0 = su + \sum_{i=1}^n s_i v_i.$$

Dabei ist $s \neq 0$, da andernfalls dies eine nichttriviale Darstellung der 0 allein mit den linear unabhängigen Vektoren v_1, \dots, v_n wäre. Daher können wir

$$u = - \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{s} v_i$$

schreiben, so dass eine Darstellung von u möglich ist. \square

BEMERKUNG 7.13. Es sei eine Basis v_1, \dots, v_n eines K -Vektorraums V gegeben. Aufgrund von Satz 7.12 bedeutet dies, dass es für jeden Vektor $u \in V$ eine eindeutig bestimmte Darstellung (eine Linearkombination)

$$u = s_1 v_1 + s_2 v_2 + \dots + s_n v_n$$

gibt. Die dabei eindeutig bestimmten Elemente $s_i \in K$ (Skalare) heißen die *Koordinaten* von u bezüglich der gegebenen Basis. Bei einer gegebenen Basis entsprechen sich also die Vektoren und die Koordinatentupel $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in K^n$. Man sagt, dass eine Basis ein *lineares Koordinatensystem* festlegt.⁵

SATZ 7.14. *Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem. Dann besitzt V eine endliche Basis.*

⁵Lineare Koordinaten vermitteln also eine bijektive Beziehung zwischen Punkten und Zahlentupeln. Aufgrund der Linearität ist eine solche Bijektion mit der Addition und der Skalarmultiplikation verträglich. In vielen anderen Kontexten spielen auch nichtlineare (oder krummlinige) Koordinaten eine wichtige Rolle. Auch diese setzen Raumpunkte mit Zahlentupel in eine bijektive Verbindung. Wichtige nichtlineare Koordinaten sind u.A. Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten. Mathematische Probleme können häufig durch eine geeignete Wahl von Koordinaten vereinfacht werden, beispielsweise bei Volumenberechnungen.

Beweis. Es sei $v_i, i \in I$, ein Erzeugendensystem von V mit einer endlichen Indexmenge I . Wir wollen mit der Charakterisierung aus Satz 7.12 argumentieren. Falls die Familie schon minimal ist, so liegt eine Basis vor. Andernfalls gibt es ein $k \in I$ derart, dass die um v_k reduzierte Familie, also $v_i, i \in I \setminus \{k\}$, ebenfalls ein Erzeugendensystem ist. In diesem Fall kann man mit der kleineren Indexmenge weiterargumentieren. Mit diesem Verfahren gelangt man letztlich zu einer Teilmenge $J \subseteq I$ derart, dass $v_i, i \in J$, ein minimales Erzeugendensystem, also eine Basis ist. \square

Abbildungsverzeichnis

Quelle = VectorGenerado.gif , Autor = Benutzer Marianov auf
Commons, Lizenz = PD

1