Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Vorlesung 7

Lineare Unabhängigkeit

Definition 7.1. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann heißt eine Familie von Vektoren v_i, $i \in I$, (mit einer beliebigen endlichen Indexmenge I) *linear unabhängig*, wenn eine Gleichung

$$\sum_{i \in I} a_i v_i = 0 \text{ mit } a_i \in K$$

nur bei $a_i = 0$ für alle i möglich ist.

Wenn eine Familie nicht linear unabhängig ist, so nennt man sie *linear abhängig*. Man nennt übrigens eine Linearkombination $\sum_{i \in I} a_i v_i = 0$ eine *Darstellung des Nullvektors*. Sie heißt die *triviale Darstellung*, wenn alle Koeffizienten a_i null sind, andernfalls, wenn also mindestens ein Koeffizient nicht null ist, spricht man von einer *nichttrivialen Darstellung der Null*. Eine Familie von Vektoren ist genau dann linear unabhängig, wenn man mit ihnen nur auf die triviale Art den Nullvektor darstellen kann. Dies ist auch äquivalent dazu, dass man keinen Vektor aus der Familie als Linearkombination der anderen ausdrücken kann.

Lemma 7.2. *Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Wenn die Familie linear unabhängig ist, so ist auch zu jeder Teilmenge $J \subseteq I$ die Familie v_i , $i \in J$, linear unabhängig.*
(2) *Die leere Familie ist linear unabhängig.*
(3) *Wenn die Familie den Nullvektor enthält, so ist sie nicht linear unabhängig.*
(4) *Wenn in der Familie ein Vektor mehrfach vorkommt, so ist sie nicht linear unabhängig.*
(5) *Ein Vektor v ist genau dann linear unabhängig, wenn $v \neq 0$ ist.*
(6) *Zwei Vektoren v und u sind genau dann linear unabhängig, wenn weder u ein skalares Vielfaches von v ist noch umgekehrt.*

Beweis. Siehe Aufgabe *****. □

Definition 7.3. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann nennt man zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ den Vektor

$$e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in K^n ,$$

wobei 1 an der i-ten Stelle steht, den i-ten *Standardvektor*.

Beispiel 7.4. Die Standardvektoren im K^n sind linear unabhängig. Eine Darstellung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \; = \; 0$$

bedeutet ja einfach

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + a_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

woraus sich aus der i-ten Zeile direkt $a_i = 0$ ergibt.

Beispiel 7.5. Die drei Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig. Es ist nämlich

$$4 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors.

Bemerkung 7.6. Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in K^m$ sind genau dann linear abhängig, wenn das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

eine nichttriviale (d.h. von 0 verschiedene Lösung) besitzt.

Basen

Definition 7.7. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann heißt ein linear unabhängiges Erzeugendensystem $v_i \in V$, $i \in I$, von V eine *Basis* von V.

Beispiel 7.8. Die Standardvektoren im K^n bilden eine Basis. Die lineare Unabhängigkeit wurde in Fakt ***** gezeigt. Um zu zeigen, dass auch ein Erzeugendensystem vorliegt, sei $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n$ ein beliebiger Vektor. Dann ist aber direkt

$$v = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i .$$

Also liegt eine Basis vor, die man die *Standardbasis* des K^n nennt.

Satz 7.9. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_n \in V$ eine Familie von Vektoren. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *Die Familie ist eine Basis von V.*
(2) *Die Familie ist ein minimales Erzeugendensystem, d.h. sobald man einen Vektor v_i weglässt, liegt kein Erzeugendensystem mehr vor.*
(3) *Für jeden Vektor $u \in V$ gibt es genau eine Darstellung*

$$u = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n .$$

(4) *Die Familie ist maximal linear unabhängig, d.h. sobald man irgendeinen Vektor dazunimmt, ist die Familie nicht mehr linear unabhängig.*

Beweis. Wir führen einen Ringschluss durch. (1) $\Rightarrow$ (2). Die Familie ist ein Erzeugendensystem. Nehmen wir einen Vektor, sagen wir v_1, aus der Familie heraus. Wir müssen zeigen, dass dann die verbleibende Familie, also $v_2, \ldots, v_n$ kein Erzeugendensystem mehr ist. Wenn sie ein Erzeugendensystem wäre, so wäre insbesondere v_1 als Linearkombination der Vektoren darstellbar, d.h. man hätte

$$v_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i .$$

Dann ist aber

$$v_1 - \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i = 0$$

eine nichttriviale Darstellung der 0, im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Familie. (2) $\Rightarrow$ (3). Nach Voraussetzung ist die Familie ein Erzeugendensystem, so dass sich jeder Vektor als Linearkombination darstellen lässt. Angenommen, es gibt für ein $u \in V$ eine mehrfache Darstellung, d.h.

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i ,$$

wobei mindestens ein Koeffizient verschieden sei. Ohne Einschränkung sei $\lambda_1 \neq \mu_1$. Dann erhält man die Beziehung

$$(\lambda_1 - \mu_1) v_1 = \sum_{i=2}^{n} (\mu_i - \lambda_i) v_i .$$

Wegen $\lambda_1 - \mu_1 \neq 0$ kann man durch diese Zahl dividieren und erhält eine Darstellung von v_1 durch die anderen Vektoren, d.h. nach Aufgabe ***** ist auch die Familie ohne v_1 ein Erzeugendensystem von V, im Widerspruch zur Minimalität. (3) $\Rightarrow$ (4). Wegen der eindeutigen Darstellbarkeit besitzt insbesondere der Nullvektor nur die triviale Darstellung, d.h. die Vektoren sind linear unabhängig. Nimmt man einen Vektor u hinzu, so besitzt dieser eine Darstellung

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

und daher ist

$$0 = u - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

eine nichttriviale Darstellung der 0, so dass die verlängerte Familie $u, v_1, \ldots, v_n$ nicht linear unabhängig ist. (4) $\Rightarrow$ (1). Die Familie ist linear unabhängig, wir müssen zeigen, dass sie auch ein Erzeugendensystem bildet. Sei dazu $u \in V$. Nach Voraussetzung ist die Familie $u, v_1, \ldots, v_n$ nicht linear unabhängig, d.h. es gibt eine nichttriviale Darstellung

$$0 = \lambda u + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \,.$$

Dabei ist $\lambda \neq 0$, da andernfalls dies eine nichttriviale Darstellung der 0 allein mit den linear unabhängigen Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ wäre. Daher können wir

$$u = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} v_i$$

schreiben, so dass eine Darstellung von u möglich ist. □

Satz 7.10. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem. Dann besitzt V eine endliche Basis.*

Beweis. Es sei v_i, $i \in I$, ein Erzeugendensystem von V mit einer endlichen Indexmenge I. Wir wollen mit der Charakterisierung aus Fakt ***** (2) argumentieren. Falls die Familie schon minimal ist, so liegt eine Basis vor. Andernfalls gibt es ein $k \in I$ derart, dass die um v_k reduzierte Familie, also v_i, $i \in I \setminus \{k\}$, ebenfalls ein Erzeugendensystem ist. In diesem Fall kann man mit der kleineren Indexmenge weiterargumentieren. Mit diesem Verfahren gelangt man letztlich zu einer Teilmenge $J \subseteq I$ derart, dass v_i, $i \in J$, ein minimales Erzeugendensystem, also eine Basis ist. □