Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Mathematik III

Arbeitsblatt 89

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 89.1. Man gebe eine kompakte Ausschöpfung für die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ an.

AUFGABE 89.2. Man gebe eine kompakte Ausschöpfung für den $\mathbb{R}^n$ an.

AUFGABE 89.3. Bestimme die Träger der folgenden Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

(1) Eine Polynomfunktion.
(2) Die Sinusfunktion.
(3) Die Exponentialfunktion.
(4) Die Indikatorfunktion $e_{\mathbb{Z}}$.
(5) Die Indikatorfunktion $e_{\mathbb{Q}}$.
(6) Die Indikatorfunktion $e_{[a,b]}$.
(7) Die Indikatorfunktion $e_{]a,b[}$.

AUFGABE 89.4. Es sei X ein topologischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeige, dass der Abschluss von T gleich dem Träger der Indikatorfunktion e_T ist.

Die folgende Aufgabe zeigt, dass es stets nicht-stetige Partitionen der Eins gibt.

AUFGABE 89.5. Es sei X ein topologischer Raum und $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Zeige, dass die Familie der Indikatorfunktionen

$$e_P, P \in X,$$

eine der Überdeckung untergeordnete Partition der Eins ist.

AUFGABE 89.6. Wir betrachten die kompakte Ausschöpfung $A_n = [-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$, der reellen Zahlen und die offene Überdeckung $W_n = A_{n+1}^o \setminus A_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, (es sei $A_{-1} = \emptyset$). Finde eine Überdeckung von $\mathbb{R}$ mit offenen Intervallen, die die Eigenschaften aus Lemma 89.7 (und seinem Beweis) erfüllt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 89.7. (3 Punkte)

Es sei A_n, $n \in \mathbb{N}$, eine kompakte Ausschöpfung eines topologischen Raumes X. Zeige, dass die Beziehung

$$A_{n+1} \setminus A_n^o \subseteq A_{n+2}^o \setminus A_{n-1}$$

gilt.

Aufgabe 89.8. (4 Punkte)

Man gebe zur offenen Überdeckung

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n, n+3[$$

eine untergeordnete stetige Partition der Eins an.

Aufgabe 89.9. (6 Punkte)

Wir betrachten die kompakte Ausschöpfung

$$A_n = B(0,n), n \in \mathbb{N},$$

des $\mathbb{R}^2$ und die offene Überdeckung

$$W_n = A_{n+1}^o \setminus A_{n-1}, n \in \mathbb{N},$$

(es sei $A_{-1} = \emptyset$). Finde eine Überdeckung des $\mathbb{R}^2$ mit offenen Kreisscheiben, die die Eigenschaften aus Lemma 89.7 (und seinem Beweis) erfüllt.

Aufgabe 89.10. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen topologischen Raum, der keine kompakte Ausschöpfung besitzt.

Abbildungsverzeichnis