Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 19

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 19.1. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid, das von teilerfremden Elementen erzeugt werde. Es sei vorausgesetzt, dass die Multiplizität von M mit der Führungszahl von M übereinstimmt. Bestimme ein minimales Erzeugendensystem und die Einbettungsdimension von M.

Aufgabe 19.2. Sei M ein kommutatives Monoid und R ein kommutativer Ring. Charakterisiere für welche Teilmengen $I \subseteq M$ die Teilmenge

$$R[I] = \bigoplus_{m \in I} T^m \subseteq R[M]$$

ein Ideal in $R[M]$ ist.

Aufgabe 19.3. Sei K ein Körper. Finde ein kommutatives Monoid M derart, dass eine Isomorphie

$$K[M] \cong K[X, Y, U, V]/(UX - VY)$$

vorliegt.

Aufgabe 19.4. Sei $R \subseteq S$ eine ganze Erweiterung von Integritätsbereichen und sei $F \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass dann auch die zugehörige Erweiterung $R_F \subseteq S_F$ ganz ist.

Aufgabe 19.5.*

Seien R und S Integritätsbereiche und sei $R \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung. Es sei $f \in R$ ein Element, das in S eine Einheit ist. Zeige, dass f dann schon in R eine Einheit ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 19.6. (4 Punkte)

Sei $M \subset \mathbb{N}$ das durch $3, 5, 7$ erzeugte numerische Untermonoid. Bestimme eine Restklassendarstellung des zugehörigen Monoidringes.

Aufgabe 19.7. (4 Punkte)

Klassifiziere sämtliche numerische Monoide M (mit teilerfremden Erzeugern) mit Führungszahl $f(M) \leq 6$. Man gebe jeweils die Einbettungsdimension, die Multiplizität und den Singularitätsgrad an.

Aufgabe 19.8. (3 Punkte)

Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid und K ein Körper. Definiere

$$M_+ = M \cap \mathbb{N}_+ \text{ und } nM_+ = \{m \in M \,|\, \text{es gibt eine Darstellung } m = m_1 + \ldots + m_n \text{ mit } m_i \in M_+\} .$$

Zeige, dass nM_+ „Ideale“ in M sind, dass zu M_+ ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ in $K[M]$ gehört, und dass das zu nM_+ gehörige Ideal gleich $\mathfrak{m}^n$ ist.

Aufgabe 19.9. (3 Punkte)

Seien M und N kommutative Monoide und sei K ein Körper. In welcher Beziehung steht K–Spek $(K[M \times N])$ zu K–Spek $(K[M])$ und K–Spek $(K[N])$?

Aufgabe 19.10. (3 Punkte)

Seien R, S, T kommutative Ringe und seien $\varphi : R \to S$ und $\psi : S \to T$ Ringhomomorphismen derart, dass S ganz über R und T ganz über S ist. Zeige, dass dann auch T ganz über R ist.

(Vergleiche Aufgabe 10.10).