Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Arbeitsblatt 13

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 13.1. Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} Z & E & I & L & E \\ R & E & I & H & E \\ H & O & R & I & Z \\ O & N & T & A & L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S & E & I \\ P & V & K \\ A & E & A \\ L & R & A \\ T & T & L \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 13.2. Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 2+i & 1-\frac{1}{2}i & 4i \\ -5+7i & \sqrt{2}+i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5+4i & 3-2i \\ \sqrt{2}-i & e+\pi i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-3i \end{pmatrix}$$

gemäß den beiden möglichen Klammerungen.

Aufgabe 13.3. Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & k+2 & k+1 \\ 0 & 0 & k+1 & k \\ -k & k+1 & 0 & 0 \\ k+1 & -(k+2) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für jedes k zu sich selbst invers ist.

Aufgabe 13.4. Bestimme das Matrixprodukt

$$e_i \circ e_j ,$$

wobei links der i-te Standardvektor (der Länge n) als Zeilenvektor und rechts der j-te Standardvektor (ebenfalls der Länge n) als Spaltenvektor aufgefasst wird.

Aufgabe 13.5. Es sei M eine $m \times n$-Matrix. Zeige, dass das Matrixprodukt Me_j mit dem j-ten Standardvektor (als Spaltenvektor aufgefasst) die j-te Spalte von M ergibt. Was ist e_iM, wobei e_i der i-te Standardvektor (als Zeilenvektor aufgefasst) ist?

AUFGABE 13.6. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge $\mathrm{GL}_n(K)$ der invertierbaren Matrizen eine Gruppe ist. Zeige ferner, dass diese Gruppe bei $n \geq 2$ nicht kommutativ ist.

AUFGABE 13.7. Zeige, dass sich bei elementaren Zeilenumformungen der Spaltenrang nicht ändert.

AUFGABE 13.8. Es sei K ein Körper und M eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen in K. Zeige, dass die Multiplikation mit den Elementarmatrizen von links mit M folgende Wirkung haben.

(1) $(A_{ij}(a)) \circ M =$ Addition des a-fachen der j-ten Zeile von M zur i-ten Zeile.
(2) $(S_k(s))) \circ M =$ Multiplikation der k-ten Zeile von M mit s.
(3) $V_{ij} \circ M =$ Vertauschen der i-ten und der j-ten Zeile von M.

AUFGABE 13.9. Zeige, dass die Elementarmatrizen invertierbar sind. Wie sehen zu den Elementarmatrizen die inversen Matrizen aus?

AUFGABE 13.10. Beschreibe die Wirkungsweise, wenn man eine Matrix mit einer Elementarmatrix von rechts multipliziert.

AUFGABE 13.11. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi : K^3 \longrightarrow K^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Es sei $U \subseteq K^3$ der durch die lineare Gleichung $2x + 3y + 4z = 0$ definierte Untervektorraum von K^3, und ψ sei die Einschränkung von φ auf U. Zu U gehören Vektoren der Form

$$u = (0, 1, a),\ v = (1, 0, b) \text{ und } w = (1, c, 0).$$

Berechne die Übergangsmatrizen zwischen den Basen

$$\mathfrak{b}_1 = v, w,\ \mathfrak{b}_2 = u, w \text{ und } \mathfrak{b}_3 = u, v$$

von U sowie die beschreibenden Matrizen für ψ bzgl. dieser drei Basen (und der Standardbasis auf K^2).

Aufgabe 13.12. Es sei K ein Körper und es seien V und W K-Vektorräume der Dimension n bzw. m. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bzgl. gewisser Basen durch die Matrix $M \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$ beschrieben werde. Zeige, dass

$$\mathrm{rang}\ \varphi = \mathrm{rang}\ M$$

gilt.

Der Begriff „Isomorphismus" kommt in unterschiedlichen Zusammenhängen vor. Für Körper lautet die Definition

Es seien K und L zwei Körper. Eine Abbildung

$$\varphi : K \longrightarrow L$$

heißt *Körper-Isomorphismus*, wenn φ bijektiv ist und wenn die folgenden Eigenschaften gelten.

(1) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$,
(2) $\varphi(1) = 1$,
(3) $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Aufgabe 13.13. Zeige, dass der einzige Körper-Isomorphismus

$$\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

die Identität ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 13.14. (3 Punkte)

Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl und es sei

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ w \longmapsto zw,$$

die dadurch definierte Multiplikation, die eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung ist. Wie sieht die Matrix zu dieser Abbildung bzgl. der reellen Basis 1 und i aus? Zeige, dass zu zwei komplexen Zahlen z_1 und z_2 mit den zwei reellen Matrizen M_1 und M_2 die Produktmatrix $M_2 \circ M_1$ die beschreibende Matrix zu $z_1 z_2$ ist.

Aufgabe 13.15. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper. Zeige, dass die Abbildung

$$(K, +, 0) \longrightarrow (\mathrm{Mat}_2(K), \circ, E_n),\ a \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 13.16. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum und $m \in \mathbb{N}$. Betrachte auf der Produktmenge V^m die folgende Relation.

$$(v_1, \ldots, v_m) \sim (w_1, \ldots, w_m), \text{ falls } \langle v_1, \ldots, v_m \rangle = \langle w_1, \ldots, w_m \rangle$$

Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Man gebe eine Bijektion zwischen der zugehörigen Quotientenmenge und der Menge der Unterräume von V der Dimension $\leq m$ an. Zeige ferner, dass zwei Tupel $(v_1, \ldots, v_m)$ und $(w_1, \ldots, w_m)$ genau dann in dieser Relation zueinander stehen, wenn es eine invertierbare $m \times m$-Matrix $M = (a_{ij})_{ij} \in \operatorname{Mat}_m(K)$ gibt mit

$$v_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} w_j$$

für alle i.

Aufgabe 13.17. (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 13.18. (5 Punkte)

Zeige, dass der einzige Körper-Isomorphismus

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

die Identität ist.

Aufgabe 13.19. (3 Punkte)

Wir betrachten die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Es sei

$$\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

ein Körper-Isomorphismus mit $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Zeige, dass φ entweder die Identität oder die komplexe Konjugation ist.