Zahlentheorie (Osnabrück SS 2008)

Arbeitsblatt 14

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Sei p eine Sophie Germain Primzahl. Zeige, dass 2 eine Primitivwurzel modulo $q = 2p + 1$ ist genau dann, wenn $p = 1 \mod 4$ ist.

Aufgabe 2. (2 Punkte)

Sei p eine Sophie Germain Primzahl und $q = 2p + 1$. Sei a gegeben mit $2 \leq a \leq q - 2$. Zeige, dass a genau dann eine primitive Einheit modulo q ist, wenn es kein Quadratrest modulo q ist.

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Sei p eine Sophie Germain Primzahl, $q = 2p + 1$. Zeige, dass q ein Teiler von $M_p + 2 = 2^p + 1$ ist genau dann, wenn $q = \pm 3 \mod 8$ ist.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Zeige: für eine Primzahl p ist die Mersennesche Zahl M_p quasiprim zur Basis 2.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Sei n eine Carmichael-Zahl. Dann ist n ungerade und besitzt mindestens drei Primfaktoren.

Aufgabe 6. (2 Punkte)

Zeige, dass 1105 und 1729 Carmichael-Zahlen sind.

Aufgabe 7. (4 Punkte)

Sei p eine Primzahl > 3 mit der Eigenschaft, dass auch $2p - 1$ und $3p - 2$ prim sind. Dann ist

$$n = p(2p - 1)(3p - 2)$$

eine Carmichael-Zahl.

Aufgabe 8. (2 Punkte)

Beschreibe die Konstruktion mit Zirkel und Lineal eines regelmäßigen Fünfecks, wie sie in der folgenden Animation dargestellt ist. Konstruktion eines regulären Fünfecks mit Zirkel und Lineal.

Aufgabe 9. (2 Punkte)

Gib eine Liste aller natürlichen Zahlen n zwischen 100 und 200 mit der Eigenschaft, dass das regelmäßige n-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

Aufgabe 10. (2 Punkte)

Sei n eine gerade vollkommene Zahl. Berechne die Eulersche Funktion $\varphi(n)$.

Aufgabe 11. (4 Punkte)

Sei n eine gerade vollkommene Zahl, $n \neq 6$. Zeige, dass n die Summe von aufeinanderfolgenden ungeraden Kubikzahlen ist.