Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Vorlesung 22

Kriterien für Extrema

In der zwanzigsten Vorlesung haben wir gesehen, dass es eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremums einer differenzierbaren Funktion ist, dass die Ableitung an der in Frage stehenden Stelle gleich 0 ist. Wir formulieren nun ein wichtiges hinreichendes Kriterium, das auf die höheren Ableitungen Bezug nimmt.

SATZ 22.1. *Es sei I ein reelles Intervall,*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, und $a \in I$ ein innerer Punkt des Intervalls. Es gelte

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0 \text{ und } f^{(n+1)}(a) \neq 0\,.$$

Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Wenn n gerade ist, so besitzt f in a kein Extremum.*
(2) *Sei n ungerade. Bei $f^{(n+1)}(a) > 0$ besitzt f in a ein isoliertes Minimum.*
(3) *Sei n ungerade. Bei $f^{(n+1)}(a) < 0$ besitzt f in a ein isoliertes Maximum.*

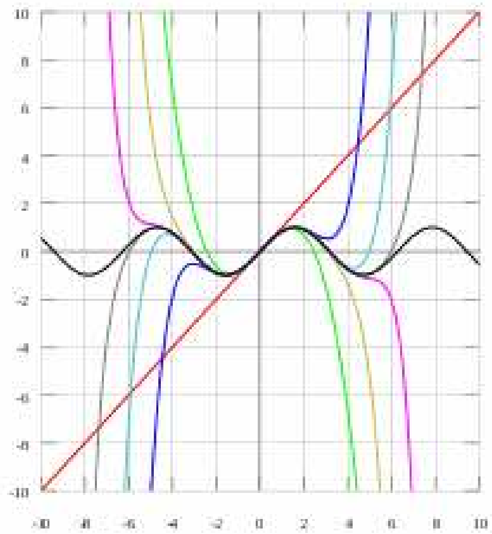
Beweis. Unter den Voraussetzungen wird die Taylor-Formel zu

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

mit c zwischen a und x. Je nachdem, ob $f^{(n+1)}(a) > 0$ oder $f^{(n+1)}(a) < 0$ ist, gilt auch (wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der $(n+1)$-ten Ableitung) $f^{(n+1)}(x) > 0$ bzw. $f^{(n+1)}(x) < 0$ für $x \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$ für ein geeignetes $\epsilon > 0$. Für diese x ist auch $c \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$, so dass das Vorzeichen von $f^{(n+1)}(c)$ vom Vorzeichen von $f^{(n+1)}(a)$ abhängt. Bei n gerade ist $n+1$ ungerade und daher wechselt $(x-a)^{n+1}$ das Vorzeichen (abhängig von $x > a$ oder $x < a$). Da das Vorzeichen von $f^{(n+1)}(c)$ sich nicht ändert, ändert sich das Vorzeichen von $f(x) - f(a)$. Das bedeutet, dass kein Extremum vorliegen kann. Sei nun n ungerade. Dann ist $n+1$ gerade, so dass $(x-a)^{n+1} > 0$ ist für alle $x \neq a$ in der Umgebung. Das bedeutet in der Umgebung bei $f^{(n+1)}(a) > 0$, dass $f(x) > f(a)$ ist und in a ein isoliertes Minimum vorliegt, und bei $f^{(n+1)}(a) < 0$, dass $f(x) < f(a)$ ist und in a ein isoliertes Maximum vorliegt. □

Ein Spezialfall davon ist, dass bei $f'(a) = 0$ und $f''(a) > 0$ ein isoliertes Minimum und bei $f'(a) = 0$ und $f''(a) < 0$ ein isoliertes Maximum vorliegt.

Die Taylor-Reihe



Die reelle Sinusfunktion zusammen mit verschiedenen approximierenden Taylorpolynomen (von ungeradem Grad).

Definition 22.2. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall,

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine ∞-oft differenzierbare Funktion und $a \in I$. Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die *Taylor-Reihe* zu f im Entwicklungspunkt a.

Satz 22.3. *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ eine Potenzreihe, die auf dem Intervall $]-r, r[$ konvergiere, und es sei*

$$f :]-r, r[\longrightarrow \mathbb{R}$$

die dadurch definierte Funktion. Dann ist f unendlich oft differenzierbar und die Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt 0 stimmt mit der vorgegebenen Potenzreihe überein.

Beweis. Die unendliche Differenzierbarkeit folgt direkt aus Satz 21.1 durch Induktion. Daher existiert die Taylor-Reihe insbesondere im Punkt 0. Es ist also lediglich noch zu zeigen, dass die n-te Ableitung von f in 0 den Wert $c_n n!$ besitzt. Dies folgt aber ebenfalls aus Satz 21.1. $\square$

Beispiel 22.4. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

mit

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{falls } x > 0\,. \end{cases}$$

Wir behaupten, dass diese Funktion unendlich oft differenzierbar ist, was nur im Nullpunkt nicht offensichtlich ist. Man zeigt zunächst durch Induktion, dass sämtliche Ableitungen von $e^{-\frac{1}{x}}$ die Form $p(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$ mit gewissen Polynomen $p \in \mathbb{R}[Z]$ besitzen und dass davon der Limes für $x \to 0$, $x > 0$ stets $= 0$ ist (siehe Aufgabe 22.4 und Aufgabe 22.5). Daher ist der (rechtsseitige) Limes für alle Ableitungen gleich 0 und existiert. Alle Ableitungen am Nullpunkt haben also den Wert null und daher ist die Taylor-Reihe im Nullpunkt die Nullreihe. Die Funktion f ist aber in keiner Umgebung des Nullpunktes die Nullfunktion, da $e^{-\frac{1}{x}} > 0$ ist.

Potenzreihenansatz

Die Taylor-Reihe einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion liefert häufig eine gute Approximation für die Funktion. Definitionsgemäß muss man zur Berechnung der Taylor-Reihe die Funktion ableiten. Für „implizit“ gegebene Funktionen kann man sie aber auch direkt bestimmen, was wir hier anhand typischer Beispiele demonstrieren. Als Faustregel gilt dabei, dass man lediglich die n-ten Ableitungen der die Funktion definierenden Daten kennen muss, um das n-te Taylor-Polynom der Funktion zu bestimmen. Wir verzichten weitgehend auf Konvergenzüberlegungen. Wenn aber die Daten durch Potenzreihen gegeben sind, so konvergieren die im Folgenden beschriebenen Taylor-Reihen auf einem gewissen Intervall und stellen eine Funktion dar.

Bemerkung 22.5. Es seien

$$f : I \longrightarrow J$$

und

$$g : J \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen, für die die Taylor-Polynome in den Entwicklungspunkten $a \in I$ und $b := f(a) \in J$ bis zum Grad n bekannt seien (insbesondere seien also diese Funktionen bis zur Ordnung n differenzierbar). Dann ist die hintereinandergeschaltete Funktion

$$g \circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

bis zur Ordnung n differenzierbar. Das zugehörige Taylor-Polynom lässt sich direkt berechnen: Sei dazu $S = \sum_{i=0}^{n} c_i(x-a)^i$ das Taylor-Polynom zu f und $T = \sum_{j=0}^{n} d_j(y-b)^j$ das Taylor-Polynom zu g. Dann stimmt das Taylor-Polynom von $g \circ f$ bis zum Grad n mit dem Polynom $T \circ S$ bis zum Grad n

überein (das Polynom $T \circ S$ hat im Allgemeinen einen Grad $> n$. Man denke an $f(x) = x^2$ und $g(y) = y^2$ und $n = 2$). D.h. man muss in T überall y durch S ersetzen, durch Umsortieren ein Polynom in $x - a$ erhalten und davon die Monome vom Grad $\geq n + 1$ weglassen (diese Monome muss man also nicht ausrechnen).

Bemerkung 22.6. Es sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine n-fach differenzierbare Funktion, für die das Taylor-Polynom im Entwicklungspunkt $a \in I$ bis zum Grad n bekannt sei und für die $f(a) \neq 0$ sei. Dann ist die Funktion $1/f$ auf einem offenen Intervall um a definiert und nach Lemma 19.7 differenzierbar in a. Aufgrund von Satz 14.13 gilt (für $|x| < 1$)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

bzw.

$$\frac{1}{x} = \sum_{i=0}^{\infty} (1-x)^i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (x-1)^i$$

d.h. für die Funktion $\frac{1}{x}$ ist die Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt 1 bekannt. Wir ersetzen f durch $h = \frac{1}{f(a)} f$, so dass $h(a) = 1$ gilt. Dann kann man die Funktion $1/h$ als die Verknüpfung von h mit der Funktion $\frac{1}{x}$ schreiben. Daher erhält man wegen Bemerkung 22.5 das Taylor-Polynom bis zum Grad n von $1/h$, indem man in $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (x-1)^i$ das Taylor-Polynom (bis zum Grad n) von h im Entwicklungspunkt a einsetzt und beim Grad n abschneidet. Das Taylor-Polynom von f erhält man, indem man mit $f(a)$ multipliziert.

Beispiel 22.7. Wir möchten die Taylor-Reihe bis zum Grad 6 von $\frac{1}{\cos x}$ im Entwicklungspunkt 0 gemäß Bemerkung 22.6 bestimmen. Nach Definition ist

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \ldots = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 \ldots.$$

Zur Berechnung des Taylor-Polynoms bis zum Grad 6 braucht man nur die angeführte Entwicklung des Kosinus bis zum Grad 6. Das Taylorpolynom bis zum Grad 6 von $1/\cos x$ im Nullpunkt ist somit

$$\begin{aligned} & 1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6\right) + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6\right)^3 \\ = \; & 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6 + \ldots + \frac{1}{8}x^6 + \ldots \\ = \; & 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6. \end{aligned}$$

Dabei wurden nur die für den Grad 6 relevanten Monome ausgerechnet.

Bemerkung 22.8. Es sei

$$f : I \longrightarrow J$$

(I, J seien reelle Intervalle) eine bijektive, n-mal differenzierbare Funktion, und in einem festen Punkt $a \in I$ gelte $f'(a) \neq 0$. Nach Satz 19.9 ist die Umkehrfunktion

$$g = f^{-1} : J \longrightarrow I$$

ebenfalls differenzierbar. Die Taylorreihe bis zum Grad n der Umkehrfunktion g kann man aus der Taylorreihe S bis zum Grad n von f berechnen. Man macht dazu ausgehend von $f \circ g = \mathrm{id}$ den Ansatz

$$S \circ T = x \,.$$

Dabei steht rechts die Taylor-Reihe der Identität, und links muss man das zu bestimmende Polynom T mit unbestimmten Koeffizienten in das Polynom S einsetzen. Der Einfachheit halber sei $a = 0$ und $f(a) = 0$. Es sei $S = a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ (mit $a_1 \neq 0$) vorgegeben und $T = b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n$ gesucht. Dies führt zur Gesamtbedingung

$$\begin{aligned} x &= S \circ T \\ &= a_1T + a_2T^2 + \ldots + a_nT^n \\ &= a_1(b_1x + \ldots + b_nx^n) + a_2\left(b_1x + \ldots + b_nx^n\right)^2 + \ldots + a_n\left(b_1x + \ldots + b_nx^n\right)^n . \end{aligned}$$

Damit erhält man die Einzelbedingungen (durch Koeffizientenvergleich zu jedem Grad)

$$1 = a_1b_1 \,,$$

$$0 = a_1b_2 + a_2b_1^2 \,,$$

$$0 = a_1b_3 + 2a_2b_1b_2 + a_3b_1^3 \,,$$

aus denen man sukzessive die Koeffizienten $b_1, b_2, b_3, \ldots$ berechnen kann.

Abbildungsverzeichnis