Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 30

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 30.1. Zeige durch ein Beispiel, dass Lemma 30.2 nicht ohne die Voraussetzung gilt, dass der Körper algebraisch abgeschlossen ist.

AUFGABE 30.2. Zeige, dass in den in Beispiel 30.6 berechneten Schnittpunkten $\neq (0,0)$ der beiden Kurven ein transversaler Schnitt vorliegt.

AUFGABE 30.3.*

Sei $K = \mathbb{C}$. Bestimme für die beiden affinen Kurven

$$V(Y - X^3) \text{ und } V(Y^2 - X^3)$$

ihre Schnittpunkte zusammen mit den Schnittmultiplizitäten. Betrachte auch Schnittpunkte im $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ und bestätige den Satz von Bezout in diesem Beispiel.

AUFGABE 30.4.*

Sei $K = \mathbb{C}$ und betrachte die beiden ebenen algebraischen Kurven

$$C = V(X - Y^2) \text{ und } D = V(Y^2 - X^5).$$

Bestimme die Schnittpunkte der beiden Kurven in der affinen Ebene und bestimme jeweils die Schnittmultiplizität. Bestimme auch die unendlich fernen Punkte der beiden Kurven (also die zusätzlichen Punkte auf den projektiven Abschlüssen $\bar{C}$ und $\bar{D}$) und überprüfe damit die Schnittpunkte im Unendlichen. Bestätige abschließend, dass der Satz von Bezout in diesem Beispiel erfüllt ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 30.5. (6 Punkte)

Sei $C \subset \mathbb{P}^2_K$ eine glatte Quadrik (also eine Kurve vom Grad zwei) über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Zeige, dass es eine Isomorphie der Kurve mit der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_K$ gibt.

AUFGABE 30.6. (5 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $C \subset \mathbb{P}_K^2$ eine glatte Kurve vom Grad $d \geq 2$. Zeige, dass es einen Morphismus $C \to \mathbb{P}_K^1$ gibt derart, dass jede Faser aus maximal $d-1$ Punkten besteht.

AUFGABE 30.7. (5 Punkte)

Es sei $C = V_+(X^3+Y^3+Z^3) \subset \mathbb{P}_K^2$ die *Fermat-Kubik* über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik $\neq 3$. Beschreibe explizit einen Morphismus $C \to \mathbb{P}_K^1$, bei dem über jedem Punkt maximal zwei Punkte liegen.

AUFGABE 30.8. (4 Punkte)

Es sei $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ der komplex-projektive Abschluss des Einheitskreises. Bestimme eine explizite bijektive Parametrisierung $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \to C$.

AUFGABE 30.9. (4 Punkte)

Bestätige Satz 30.3 für die beiden Kurven $C = V(ZY^2 - X^3)$ und $D = V(X^2 + (Y-Z)^2 - Z^2)$.

Skizziere die Situation.

AUFGABE 30.10. (4 Punkte)

Bestätige Satz 30.3 für die beiden Kurven $C = V(ZY - X^2)$ und $D = V(X^2 + (Y-Z)^2 - Z^2)$.

Skizziere die Situation.

AUFGABE 30.11. (4 Punkte)

Bestätige Satz 30.3 für die beiden monomialen Kurven, die affin durch $C = V(X^2 - Y^3)$ und $D = V(X^5 - Y^4)$ gegeben sind.

AUFGABE 30.12. (5 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring und M, N R-Moduln. Ist

$$f\colon M \longrightarrow N$$

ein R- Modulhomomorphismus, so ist

$$f^*\colon \operatorname{Hom}(N,R) \longrightarrow \operatorname{Hom}(M,R),\ \varphi \longmapsto \varphi \circ f,$$

auch ein R-Modulhomomorphismus.

Sei nun $0 \to M \to N \to P \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln.

Zeige, dass dann die induzierte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(P,R) \longrightarrow \operatorname{Hom}(N,R) \longrightarrow \operatorname{Hom}(M,R)$$

exakt ist. Man gebe auch ein Beispiel mit $R = \mathbb{Z}$, das zeigt, dass der letzte Pfeil im Allgemeinen nicht surjektiv ist.