Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Mathematik für Anwender II

Vorlesung 56

Mehrfache Integrale

Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und es sei

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine stetige Funktion. Wir wollen das Integral $\int_T f d\lambda^n$ definieren, wofür man, wenn die Variablen des $\mathbb{R}^n$ mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezeichnet werden, auch

$$\int\int \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

schreibt. Diese Schreibweise wird dann bevorzugt, wenn die jeweiligen Grenzen sinnvoll beschrieben werden können und so die Berechnung des Integrals auf die sukzessive Berechnung non n Einzelintegralen (in einer Variablen) zurückgeführt werden kann. Bei $n = 2$ spricht man von einem *Doppelintegral* und bei $n = 3$ von einem *Dreifachintegral*.

Eine wichtige Interpretation des Integrals ist, dass f eine *Massenverteilung* (oder Ladungsverteilung oder Temperaturverteilung) auf dem Körper T beschreibt. In diesem Fall ist das Integral gleich der Gesamtmasse des Körpers T. Bei $f = 1$, also bei einer konstanten Massenverteilung, erhält man über ein Integral das Volumen des Grundkörpers. Wir führen das Integral als $(n+1)$-dimensionales Volumen des Subgraphen ein.

Definition 56.1. Sei T eine Menge und

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine nichtnegative Funktion. Dann nennt man die Menge

$$S(f) = \{(x, y) \in T \times \mathbb{R} |\, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

den *Subgraph* der Funktion.

Definition 56.2. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine stetige Funktion. Es sei $S(f)$ der Subgraph dieser Funktion. Dann setzt man

$$\int_T f d\lambda^n := \lambda^{n+1}(S(f))$$

und nennt dies das (mehrdimensionale) *Integral* über T zu f.

Damit wird der Integralbegriff auf den Volumenbegriff zurückgeführt. Für eine stetige, aber nicht notwendigerweise nichtnegative Funktion f zerlegt man den Definitionsbereich in die beiden Teilmengen $T_{\geq 0} = \{P \in T | \, f(P) \geq 0\}$ und $T_{\leq 0} = \{P \in T | \, f(P) \leq 0\}$, die ebenfalls kompakt sind, und setzt

$$\int_T f d\lambda^n = \int_{T_{\geq 0}} f d\lambda^n - \int_{T_{\leq 0}} (-f) d\lambda^n \,.$$

Ebenso kann man die positiven und negativen Funktionen $f_+ = \min\,(f,0)$ und $f_- = \min\,(-f,0)$ einführen und das Integral als $\int_T f_+ d\lambda^n - \int_T f_- d\lambda^n$ ansetzen.

Aus allgemeinen Volumenregeln ergben sich die folgenden Integrationsregeln.

LEMMA 56.3. *Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und es seien*

$$f, g \colon \, T \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen. Dann gelten folgende Eigenschaften.

(1) *Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt*
$$\int_T af + bg d\lambda^n \, = \, a \int_T f d\lambda^n + b \int_T g d\lambda^n .$$
(2) *Aus $f(P) \leq g(P)$ für alle $P \in T$ folgt $\int_T f d\lambda^n \leq \int_T g d\lambda^n$.*
(3) *Wenn es eine Zerlegung $T = T_1 \cup T_2$ in kompakte Teilmengen mit $\lambda^n \,(T_1 \cap T_2) = 0$ gibt, so ist*
$$\int_T f d\lambda^n \, = \, \int_{T_1} f d\lambda^n + \int_{T_2} f d\lambda^n .$$

Die letzte Aussage ist auch ein Ansatz, um das Integral zu einer Funktion zu definieren, die nicht notwendigerweise stetig ist. Wenn es eine Zerlegung $T = \bigcup_{i \in I} T_i$ in endlich viele kompakte Teilmengen T_i gibt derart, dass das Volumen der Durchschnitte $T_i \cap T_j$ für $i \neq j$ jeweils 0 ist (die Durchschnitte müssen also Nullmengen sein) und dass die Einschränkungen $f_i = f|_{T_i}$ stetig sind, so setzt man $\int_T f d\lambda^n = \sum_{i \in I} \int_{T_i} f_i d\lambda^n$. Eine solche Zerlegung ist auch bei stetigen Funktionen häufig sinvoll.

Der Satz von Fubini

Ein besonders einfacher Fall liegt vor, wenn $T = [a,b] \times [c,d]$ ein Rechteck ist. Diese Situation wird durch den *Satz von Fubini* abgedeckt.

SATZ 56.4. *Es sei*

$$f \colon \, [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f d\lambda^2 \, = \, \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) d\lambda^1 \right) d\lambda^1 \, = \, \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) d\lambda^1 \right) d\lambda^1 .$$

Beweis. Der Querschnitt des Subgraphen zu $x = x_0$ ist der Subgraph der auf $x = x_0$ eingeschränkten Funktion, also

$$\{(x_0, y, z) \mid 0 \leq z \leq f(x_0, y),\ c \leq y \leq d\}\ .$$

Sein Flächeninhalt ist $\int_c^d f(x_0, y)dy$, und dieser Flächeninhalt hängt selbst stetig von x_0 ab (das haben wir nicht bewiesen). Daher ergibt sich die Aussage aus dem Cavalieri-Prinzip. □

Zumeist schreibt man in der vorstehenden Situation $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx$.

Beispiel 56.5. Wir wollen das Integral der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2 - xy + 2y^3,$$

über dem Rechteck $Q = [-2, 1] \times [0, 2]$ mit dem Satz von Fubini ausrechnen. Dies führt auf

$$\begin{aligned} \int_Q f\, d\lambda^2 &= \int_0^2 \left(\int_{-2}^1 \left(x^2 - xy + 2y^3\right)\, dx \right) dy \\ &= \int_0^2 \left(\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 y + 2y^3 x \right) |_{-2}^1 \right) dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}y + 2y^3 + \frac{8}{3} + 2y + 4y^3 \right) dy \\ &= \int_0^2 \left(3 + \frac{3}{2}y + 6y^3 \right) dy \\ &= \left(3y + \frac{3}{4}y^2 + \frac{3}{2}y^4 \right) |_0^2 \\ &= 6 + 3 + 24 \\ &= 33. \end{aligned}$$

Korollar 56.6. *Es seien*

$$f\colon\ [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$g\colon\ [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen. Dann gilt

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} fg d\lambda^2 = \left(\int_a^b f(x)dx \right) \cdot \left(\int_c^d g(y)dy \right).$$

Beweis. Nach Satz 56.4 ist

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]\times[c,d]} fg d\lambda^2 &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x)g(y)dy \right) dx \\ &= \int_a^b f(x) \left(\int_c^d g(y)dy \right) dx \\ &= \left(\int_c^d g(y)dy \right) \cdot \left(\int_a^b f(x)dx \right). \end{aligned}$$

□

Mehrfachintegrale über stetig berandeten Gebieten

Wir betrachten nun Mehrfachintegrale über komplizierteren Teilmengen T, wobei zunächst T eine kompakte Teilmenge im $\mathbb{R}^2$ sei. Eine handhabbare Klasse von Teilmengen sind diejenigen, die (zumindest stückweise) durch stetige Funktionen in einer Variablen berandet sind. Die Grundversion sieht dabei folgendermaßen aus: Es sei $I = [a, b]$ ein reelles Intervall und es seien

$$g, h \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Funktionen mit $g(x) \leq h(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Diese zwei Funktionen (bzw. ihre Graphen) legen dann ein Flächenstück T fest, nämlich

$$T = \{(x, y) |\, a \leq x \leq b,\, g(x) \leq y \leq h(x)\}\,.$$

Man spricht von einem *stetig berandeten Flächenstück*. Das Integral über T zu einer stetigen Funktion $f \colon T \to \mathbb{R}$ kann man folgendermaßen berechnen.

Satz 56.7. *Es sei $I = [a, b]$ ein reelles Intervall und es seien*

$$g, h \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Funktionen mit $g(x) \leq h(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Es sei T das durch die beiden zugehörigen Graphen begrenzte Flächenstück über $[a, b]$, und es sei

$$f \colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann ist

$$\int_T f d\lambda^2 = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Beweis. Dies folgt aus dem Cavalieri-Prinzip: Indem man f_+ und f_- getrennt betrachtet, kann man annehmen, dass f keine negativen Werte annimmt. Für diese Funktionen ist das Integral durch das Volumen des Subgraphen definiert. Die Querschnittsfläche des Subgraphen zu $x_0 \in [a, b]$ ist gerade $\int_{g(x_0)}^{h(x_0)} f(x_0, y) dy$. Diese Flächeninhalte hängen stetig von x_0 ab (das haben wir nicht bewiesen) und somit ist das Integral über diese Flächeninhalte nach dem Cavalieri-Prinzip das Volumen des Subgraphen. □

Beispiel 56.8. Es sei T die obere Einheitskreisscheibe und

$$f \colon T \longrightarrow \mathbb{R},\, (x, y) \longmapsto f(x, y) = x^2 y + x y^3.$$

Dann ist nach Satz 56.7

$$\int_T f d\lambda^2 = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y + x y^3 dy \right) dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{4} x y^4 \right) |_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2} x^2 \sqrt{1-x^2}^2 + \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2}^4 \right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2} x^2 \left(1-x^2\right) + \frac{1}{4} x \left(1-x^2\right)^2 \right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{4} x - \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{4} x^5 \right) dx \\
&= \left(\frac{1}{8} x^2 + \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{8} x^4 - \frac{1}{10} x^5 + \frac{1}{24} x^6 \right) |_{-1}^{1} \\
&= \frac{2}{15}.
\end{aligned}
$$

Natürlich können die begrenzenden Funktionen auch von y abhängen. Allgemeiner kann man häufig ein komplizierteres Flächenstück durch Einführung eines „Gitters“ in Flächenstücke zerlegen, die zu diesem Grundtyp gehören. In diesem Fall erhält man das Gesamtintegral durch Aufsummieren der Teilintegrale.

Wir betrachten nun dreidimensionale Bereiche T und Integrale darüber. Eine typische Situation ist dabei wieder, dass T durch stetige Funktionen berandet wird, und zwar in der folgenden Weise: Es sei $I = [a, b]$ ein reelles Intervall,

$$g, h\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien zwei stetige Funktionen mit $g(x) \leq h(x)$ und

$$p, q\colon\ \{(x, y) |\, x \in I,\, g(x) \leq y \leq h(x)\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien zwei stetige Funktionen mit $p(x, y) \leq q(x, y)$. Diese Funktionen begrenzen dann den Bereich

$$T = \{(x, y, z) |\, x \in I,\, g(x) \leq y \leq h(x),\, p(x, y) \leq z \leq q(x, y)\}\,.$$

Eine stetige Funktion $f\colon T \to \mathbb{R}$ kann man integrieren, indem man die berandenden Funktionen als Integrationsgrenzen verarbeitet.

Satz 56.9. *Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^3$ eine kompakte Teilmenge, die durch folgende Daten beschrieben werde: Ein reelles Intervall $I = [a, b]$, zwei stetige Funktionen*

$$g, h\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $g(x) \leq h(x)$ für alle $x \in [a, b]$ und zwei stetige Funktionen

$$p, q\colon\ \{(x, y) |\, x \in I,\, g(x) \leq y \leq h(x)\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $p(x, y) \leq q(x, y)$ derart, dass

$$T = \{(x, y, z) |\, x \in I,\, g(x) \leq y \leq h(x),\, p(x, y) \leq z \leq q(x, y)\}$$

ist. Es sei

$$f\colon\ T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann ist

$$\int_T f d\lambda^3 = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} \left(\int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dy \right) dx.$$

Beweis. Dies folgt ebenfalls aus dem Cavalieri-Prinzip. □

Häufig lässt man dabei die Klammern weg, da die Integralzeichen und das Integrationssymbol du als Klammerung ausreichen. Ein Mehrfachintegral ist von innen nach außen zu lesen und zu berechnen. Die einzelnen Integrale sind dabei, abgesehen davon, dass sie von zusätzlichen unbestimmten Parametern abhängen, gewöhnliche eindimensionale Integrale.

Beispiel 56.10. Es sei $R = [a,b] \times [c,d]$ ein Rechteck,

$$q\colon [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ (x,y) \longmapsto q(x,y),$$

eine stetige Funktion und T der Subgraph zu dieser Funktion, also $T = \{(x,y,z) |\, a \leq x \leq b,\, c \leq y \leq d,\, 0 \leq z \leq q(x,y)\}$. Für eine auf T definierte stetige Funktion f ist somit nach Satz 56.9

$$\int_T f d\lambda^3 = \int_a^b \int_c^d \int_0^{q(x,y)} f(x,y,z) dz dy dx.$$

Der Schwerpunkt

Definition 56.11. Zu einer kompakten Teilmenge (einem Körper) $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und einer stetigen Massenverteilung

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

mit dem Gesamtvolumen $M = \int_T f d\lambda^n$ (das als positiv vorausgesetzt sei) nennt man den Punkt $S = (s_1, \ldots, s_n)$ mit

$$s_i := \frac{1}{M} \int_T x_i f d\lambda^n = \frac{1}{M} \int_T x_i \cdot f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

den *Schwerpunkt* von T (bezüglich der Massenverteilung f).

Um die i-te Koordinate des Schwerpunktes zu erhalten muss man also über das Produkt aus i-ter Koordinatenfunktion und der Massenverteilung integrieren. Wenn die Massenverteilung (oder Massendichte) f konstant (also der Körper homogen ist), so nennt man den Schwerpunkt auch den *geometrischen Schwerpunkt.*

Beispiel 56.12. Wir berechnen den Schwerpunkt der oberen Einheitshalbkugel, also von

$$T = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\, z \geq 0 \right\} .$$

Die x- und die y-Koordinate muss aus Symmetriegründen natürlich 0 sein. Für die z-Koordinate berechnen wir

$$
\begin{aligned}
& \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz dy dx \\
= & \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2} \left(1-x^2-y^2\right) dy dx \\
= & \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(\left(1-x^2\right) y - \frac{1}{3} y^3 \right) |_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx \\
= & \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right) \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3} \left(1-x^2\right) \sqrt{1-x^2} \\
& - \left(- \left(1-x^2\right) \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3} \left(1-x^2\right) \sqrt{1-x^2} \right) dx \\
= & \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{4}{3} \left(1-x^2\right) \sqrt{1-x^2} dx \\
= & \frac{2}{3} \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right) \sqrt{1-x^2} dx.
\end{aligned}
$$

Wir führen die Substitution mit $x = \sin u$ durch und erhalten (ohne den Vorfaktor)

$$
\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 u\right) \cos u \cdot \cos u \, du &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 u\right) \left(1 - \sin^2 u\right) du \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 - 2 \sin^2 u + \sin^4 u \, du \\
&= 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1 - 2 \sin^2 u + \sin^4 u \, du.
\end{aligned}
$$

Unter Verwendung von Beispiel 25.3 ist dieses Integral gleich

$$
2 \left(\frac{\pi}{2} - 2 \frac{\pi}{4} + \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3}{8} \pi.
$$

Das Volumen der halben Einheitskugel ist nach Beispiel 55.13 gleich $\frac{2}{3}\pi$. Daher ist die z-Koordinate des Schwerpunkts gleich

$$
\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} \pi}{\frac{2}{3} \pi} = \frac{3}{8}.
$$