Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Mathematik für Anwender II

Vorlesung 56

Mehrfache Integrale

Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und es sei

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine stetige Funktion. Wir wollen das Integral $\int_T f d\lambda^n$ definieren, wofür man, wenn die Variablen des $\mathbb{R}^n$ mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezeichnet werden, auch

$$\int\int \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

schreibt. Eine wichtige Interpretation ist, dass f eine Massenverteilung auf dem Körper T beschreibt. In diesem Fall ist das Integral gleich der Gesamtmasse des Körpers. Wir führen das Integral als $(n+1)$-dimensionales Volumen des Subgraphen ein.

Definition 56.1. Sei M eine Menge und

$$f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine nichtnegative Funktion. Dann nennt man die Menge

$$S(f) = \{(x, y) \in M \times \mathbb{R} |\, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

den *Subgraph* der Funktion.

Definition 56.2. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine stetige Funktion. Es sei $S(f)$ der Subgraph dieser Funktion. Dann setzt man

$$\int_T f d\lambda^n = \lambda^{n+1}(S(f))$$

und nennt dies das (mehrdimensionale) *Integral* über T zu f.

Damit wird der Integralbegriff auf den Volumenbegriff zurückgeführt. Für eine stetige, aber nicht notwendigerweise nichtnegative Funktion f zerlegt man den Definitionsbereich in die beiden Hälften $T_{\geq 0} = \{P \in T |\, f(P) \geq 0\}$ und $T_{\leq 0} = \{P \in T |\, f(P) \leq 0\}$, die ebenfalls kompakt sind, und setzt

$$\int_T f d\lambda^n = \int_{T_{\geq 0}} f d\lambda^n - \int_{T_{\leq 0}} (-f) d\lambda^n .$$

Aus allgemeinen Volumenregeln ergben sich die folgenden Integrationsregeln.

LEMMA 56.3. *Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und es seien*

$$f, g \colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen. Dann gelten folgende Eigenschaften.

(1) *Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_T af + bg d\lambda^n = a \int_T f d\lambda^n + b \int_T g d\lambda^n.$$

(2) *Aus $f(P) \leq g(P)$ für alle $P \in T$ folgt $\int_T f d\lambda^n \leq \int_T g d\lambda^n$.*

(3) *Wenn es eine Zerlegung $T = T_1 \cup T_2$ in kompakte Teilmengen mit $\lambda^n (T_1 \cap T_2) = 0$ gibt, so ist*

$$\int_T f d\lambda^n = \int_{T_1} f d\lambda^n + \int_{T_2} f d\lambda^n.$$

Wenn $T \subseteq \mathbb{R}^2$ ist, so schreibt man auch $\int \int_T f d\lambda^2$ oder $\int \int_T f dx dy$ und spricht von einem *Doppelintegral.* Bei $T \subseteq \mathbb{R}^3$ schreibt man auch $\int \int \int_T f d\lambda^3$ oder $\int \int \int_T f dx dy dz$ und spricht von einem *Dreifachintegral.* Diese Bezeichnungen verwendet man insbesondere dann, wenn T durch stetige Funktionen berandet ist. Die Funktionen, die den Rand beschreiben, treten dann als (variable) Integrationsgrenzen auf.

Der Satz von Fubini

Ein besonders einfacher Fall liegt vor, wenn T ein Rechteck ist. Diese Situation wird durch den *Satz von Fubini* abgedeckt.

Der Satz von Fubini erlaubt die Integration über einem Rechteck $[a, b] \times [c, d]$.

SATZ 56.4. *Es sei*

$$f \colon [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f d\lambda^2 = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) d\lambda^1 \right) d\lambda^1 = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) d\lambda^1 \right) d\lambda^1.$$

Beweis. Der Querschnitt des Subgraphen zu $x = x_0$ ist

$$\{(x_0, y, z) | \, 0 \leq z \leq f(x, y), \, c \leq y \leq d\} \,,$$

das ist der Subgraph der auf $x = x_0$ eingeschränkten Funktion. Ihr Flächeninhalt ist $\int_c^d f(x_0, y) dy$, und dieser Flächeninhalt hängt selbst stetig von x_0 ab (das haben wir nicht bewiesen). Daher ergibt sich die Aussage aus dem Cavalieri-Prinzip. □

Zumeist schreibt man in der vorstehenden Situation $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$.

Beispiel 56.5. Wir wollen das Integral der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2 - xy + 2y^3,$$

über dem Rechteck $Q = [-2,1] \times [0,2]$ mit dem Satz von Fubini ausrechnen. Dies führt auf

$$\begin{aligned}
\int_Q f\, d\lambda^2 &= \int_0^2 \left(\int_{-2}^1 \left(x^2 - xy + 2y^3\right)\, dx \right) dy \\
&= \int_0^2 \left(\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 y + 2y^3 x \right) |_{-2}^{1} \right) dy \\
&= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}y + 2y^3 + \frac{8}{3} + 2y + 4y^3 \right) dy \\
&= \int_0^2 \left(3 + \frac{3}{2}y + 6y^3 \right) dy \\
&= \left(3y + \frac{3}{4}y^2 + \frac{3}{2}y^4 \right) |_0^2 \\
&= 6 + 3 + 24 \\
&= 33.
\end{aligned}$$

Korollar 56.6. *Es seien*

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$g\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen. Dann gilt

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} fg d\lambda^2 = \left(\int_a^b f(x)dx \right) \cdot \left(\int_c^d g(y)dy \right).$$

Beweis. Nach Fakt ***** ist

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]\times[c,d]} fg d\lambda^2 &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x)g(y)dy \right) dx \\
&= \int_a^b f(x) \left(\int_c^d g(y)dy \right) dx \\
&= \left(\int_c^d g(y)dy \right) \cdot \left(\int_a^b f(x)dx \right).
\end{aligned}$$

□

Mehrfachintegrale über stetig berandeten Gebieten

Satz 56.7. *Es sei $I = [a,b]$ ein reelles Intervall und es seien*

$$g,h\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Funktionen mit $g(x) \leq h(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Es sei T das durch die beiden zugehörigen Graphen begrenzte Flächenstück über $[a,b]$, und es sei

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann ist

$$\int_T f d\lambda^2 = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Beweis. Dies folgt aus dem Cavalieri-Prinzip: Indem man f_+ und f_- getrennt betrachtet, kann man annehmen, dass f keine negativen Werte annimmt. Für diese Funktionen ist das Integral durch das Volumen des Subgraphen definiert. Die Querschnittsfläche des Subgraphen zu $x_0 \in [a,b]$ ist gerade $\int_{g(x_0)}^{h(x_0)} f(x_0,y)dy$. Diese Flächeninhalte hängen stetig von x_0 ab (das haben wir nicht bewiesen) und somit ist das Integral über diese Flächeninhalte nach dem Cavalieri-Prinzip das Volumen des Subgraphen. □

Beispiel 56.8. Es sei T die obere Einheitskreisscheibe und

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto f(x,y) = x^2y + xy^3.$$

Dann ist nach Fakt *****

$$\begin{aligned}
\int_T f d\lambda^2 &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2y + xy^3 dy \right) dx \\
&= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}xy^4 \right) |_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^2\sqrt{1-x^2}^2 + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}^4 \right) dx \\
&= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^2\left(1-x^2\right) + \frac{1}{4}x\left(1-x^2\right)^2 \right) dx \\
&= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^5 \right) dx \\
&= \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{20}x^6 \right) |_{-1}^1 \\
&= \frac{1}{10}.
\end{aligned}$$

Satz 56.9. *Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^3$ eine kompakte Teilmenge, die durch folgende Daten beschrieben werde: Ein reelles Intervall $I = [a,b]$, zwei stetige Funktionen*

$$g,h\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $g(x) \leq h(x)$ für alle $x \in [a,b]$ und zwei stetige Funktionen

$$p,q\colon \{(x,y) |\, x \in I,\ g(x) \leq y \leq h(x)\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $p(x,y) \leq q(x,y)$ derart, dass

$$T = \{(x,y,z) |\, x \in I,\ g(x) \leq y \leq h(x),\ p(x,y) \leq z \leq q(x,y)\}$$

ist. Es sei

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann ist

$$\int_T f d\lambda^3 = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} \left(\int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dy \right) dx.$$

Beweis. Dies folgt ebenfalls aus dem Cavalieri-Prinzip. □

Häufig lässt man dabei die Klammern weg, da die Integralzeichen und das Integrationssymbol du als Klammerung ausreichen. Ein Mehrfachintegral ist von innen nach außen zu lesen und zu berechnen. Die einzelnen Integrale sind dabei, abgesehen davon, dass sie von zusätzlichen unbestimmten Parametern abhängen, gewöhnliche eindimensionale Integrale.

Beispiel 56.10. Es sei $R = [a, b] \times [c, d]$ ein Rechteck,

$$q\colon [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ (x, y) \longmapsto q(x, y),$$

eine stetige Funktion und T der Subgraph zu dieser Funktion, also $T = \{(x, y, z) |\, a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ 0 \leq z \leq q(x, y)\}$. Für eine auf T definierte stetige Funktion ist somit nach Fakt *****

$$\int_T f d\lambda^3 = \int_a^b \int_c^d \int_0^{q(x,y)} f(x,y,z) dz dy dx.$$

Der Schwerpunkt

Definition 56.11. Zu einer kompakten Teilmenge (einem Körper) $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und einer stetigen Massenverteilung

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

mit dem Gesamtvolumen $M = \int_T f d\lambda^n$ (das als positiv vorausgesetzt sei) nennt man den Punkt $S = (s_1, \ldots, s_n)$ mit

$$s_i := \frac{1}{M} \int_T x_i f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

den *Schwerpunkt* von T (bezüglich der Massenverteilung f).

Wenn die Massenverteilung (oder Massendichte) f konstant (also der Körper homogen ist), so nennt man den Schwerpunkt auch den *geometrischen Schwerpunkt.*

Beispiel 56.12. Wir berechnen den Schwerpunkt der oberen Einheitshalbkugel, also von

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0 \right\}.$$

Die x- und die y-Koordinate muss aus Symmetriegründen natürlich 0 sein. Für die z-Koordinate berechnen wir

$$
\begin{aligned}
& \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz dy dx \\
= & \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2} \left(1-x^2-y^2\right) dy dx \\
= & \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(\left(1-x^2\right) y - \frac{1}{3} y^3 \right) |_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx \\
= & \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right) \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3} \left(1-x^2\right) \sqrt{1-x^2} \\
& - \left(- \left(1-x^2\right) \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3} \left(1-x^2\right) \sqrt{1-x^2} \right) dx \\
= & \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{4}{3} \left(1-x^2\right) \sqrt{1-x^2} dx \\
= & \frac{2}{3} \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right) \sqrt{1-x^2} dx.
\end{aligned}
$$

Wir führen die Substitution mit $x = \sin u$ durch und erhalten (ohne den Vorfaktor)

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 u\right) \cos u \cdot \cos u \, du &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 u\right) \left(1 - \sin^2 u\right) du \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 - 2 \sin^2 u + \sin^4 u \, du \\
&= 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1 - 2 \sin^2 u + \sin^4 u \, du.
\end{aligned}
$$

Unter Verwendung von Beispiel ***** ist dieses Integral gleich

$$
2 \left(\frac{\pi}{2} - 2 \frac{\pi}{4} + \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3}{8} \pi.
$$

Das Volumen der halben Einheitskugel ist nach Beispiel ***** gleich $\frac{2}{3}\pi$. Daher ist die z-Koordinate des Schwerpunkts gleich

$$
\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} \pi}{\frac{2}{3} \pi} = \frac{3}{8}.
$$