Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Vorkurs Mathematik

Arbeitsblatt 6

Die folgenden Aufgaben über endliche Mengen sind intuitiv klar. Es geht aber darum, sie unter Bezug auf die Definitionen mittels bijektiven Abbildungen zu beweisen.

Aufgabe 6.1. Es seien m und n natürliche Zahlen. Zeige durch Induktion über m, dass aus einer Bijektion

$$\varphi : \{1, \ldots, m\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$$

folgt, dass $m = n$ ist.

Aufgabe 6.2. Es sei M eine endliche Menge. Zeige, dass die Anzahl von M wohldefiniert ist.

Aufgabe 6.3. Es sei M eine endliche Menge mit m Elementen und es sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass T ebenfalls eine endliche Menge ist, und dass für ihre Anzahl k die Abschätzung

$$k \leq m$$

gilt. Zeige ferner, dass T genau dann eine echte Teilmenge ist, wenn

$$k < m$$

ist.

Aufgabe 6.4. Es sei M eine endliche Menge mit m Elementen und es sei

$$M \longrightarrow N$$

eine surjektive Abbildung in eine weitere Menge N. Zeige, dass dann auch N endlich ist, und dass für ihre Anzahl n die Abschätzung

$$n \leq m$$

gilt.

Aufgabe 6.5. Sei $T \subseteq \mathbb{N}$ eine nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen. Zeige, dass T genau dann endlich ist, wenn T ein Maximum besitzt.

Aufgabe 6.6. Es seien M und N zwei disjunkte endliche Mengen. Zeige, dass die Anzahl der (disjunkten) Vereinigung $M \cup N$ gleich der Summe der beiden Anzahlen der beiden Mengen ist.

Aufgabe 6.7. Es seien M und N endliche Mengen. Zeige, dass die Produktmenge $M \times N$ ebenfalls endlich ist, und dass die Beziehung

$$\#(M \times N) = \#(M) \cdot \#(N)$$

gilt.

Aufgabe 6.8. Es seien M und N zwei endliche Teilmengen einer Menge G. Zeige, dass die Formel

$$\#(M) + \#(N) = \#(M \cup N) + \#(M \cap N)$$

gilt.

Aufgabe 6.9. Es sei G eine Menge und es seien $M_i \subseteq G$, $i = 1, \ldots, n$, endliche Teilemengen. Für eine Teilmenge $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ sei

$$M_J = \bigcap_{i \in J} M_i \,.$$

Finde eine Beziehung zwischen den Anzahlen der verschiedenen Schnittmengen M_J, $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Beweise diese Formel.

Aufgabe 6.10. Es sei $(I, \leq)$ eine total geordnete Menge. Zeige durch Induktion, dass jede nichtleere endliche Teilmenge $T \subseteq I$ ein eindeutiges Maximum besitzt.