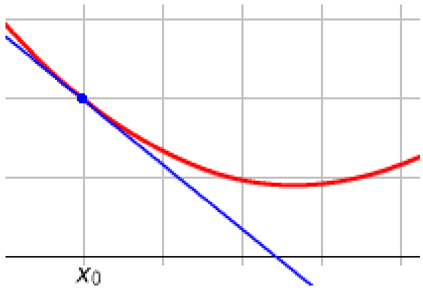
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Vorlesung 19

Differenzierbarkeit



In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge ist. Wir wollen erklären, wann eine solche Funktion in einem Punkt $a \in D$ differenzierbar ist. Die intuitive Idee ist dabei, für einen weiteren Punkt $x \in D$ die *Sekante* durch die zwei Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$ des Funktionsgraphen zu ziehen und dann „x gegen a laufen zu lassen“. Wenn sich dieser Grenzwertprozess sinnvoll durchführen lässt, so wird aus den Sekanten eine Tangente. Dieser Grenzwertprozess wird über den Begriff des Grenzwertes einer Funktion präzise gefasst, den wir im Anschluss an die Stetigkeit eingeführt haben.

Definition 19.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein Punkt und

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zu $x \in D$, $x \neq a$, heißt die Zahl

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

der *Differenzenquotient* von f zu a und x.

Der Differenzenquotient ist die Steigung der Sekante am Graph durch die beiden Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$. Für $x = a$ ist dieser Quotient *nicht* definiert. Allerdings kann ein sinnvoller Limes für $x \to a$ existieren. Dieser repräsentiert dann die Steigung der *Tangente* an f im Punkt $(a, f(a))$ (oder an der Stelle a).

Definition 19.2. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein Punkt und

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *differenzierbar* in a ist, wenn der Limes

$$\lim_{x \in D \setminus \{a\},\, x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. Im Fall der Existenz heißt dieser Limes der *Differentialquotient* oder die *Ableitung* von f in a, geschrieben

$$f'(a)\,.$$

Die Ableitung in einem Punkt a ist, falls sie existiert, ein Element in $\mathbb{R}$. Häufig nimmt man die Differenz $h := x - a$ als Parameter für den Limes des Differenzenquotienten, und lässt h gegen 0 gehen, d.h. man betrachtet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,.$$

Die Bedingung $x \in D \setminus \{a\}$ wird dann zu $a + h \in D$, $h \neq 0$.

Beispiel 19.3. Es seien $s, c \in \mathbb{R}$ und sei

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto sx + c,$$

eine affin-lineare Funktion. Zur Bestimmung der Ableitung in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$ betrachtet man

$$\frac{(sx + c) - (sa + c)}{x - a} = \frac{s(x - a)}{x - a} = s\,.$$

Dies ist konstant gleich s, so dass der Limes für x gegen a existiert und gleich s ist. Die Ableitung in jedem Punkt existiert demnach und ist gleich s. Die *Steigung* der affin-linearen Funktion ist also die Ableitung.

Beispiel 19.4. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2.$$

Der Differenzenquotient zu a und $a + h$ ist

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a+h.$$

Der Limes davon für h gegen 0 ist $2a$. Die Ableitung von f in a ist daher $f'(a) = 2a$.

Satz 19.5. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein Punkt und*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann ist f in a genau dann differenzierbar, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ und eine Funktion

$$r : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt mit r stetig in a und $r(a) = 0$ und mit

$$f(x) = f(a) + s \cdot (x - a) + r(x)(x - a)\,.$$

Beweis. Wenn f differenzierbar ist, so setzen wir $s := f'(a)$. Für die Funktion r muss notwendigerweise

$$r(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - s \text{ für } x \neq a\,, \\ 0 \text{ für } x = a\,, \end{cases}$$

gelten, um die Bedingungen zu erfüllen. Aufgrund der Differenzierbarkeit existiert der Limes

$$\begin{aligned} & \lim_{x \to a,\, x \in D \setminus \{a\}} r(x) \\ = \quad & \lim_{x \to a,\, x \in D \setminus \{a\}} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \right) - s, \end{aligned}$$

und hat den Wert 0. Dies bedeutet, dass r in a stetig ist. Wenn umgekehrt s und r mit den angegebenen Eigenschaften existieren, so gilt für $x \neq a$ die Beziehung

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = r(x) + s\,.$$

Da r stetig in a ist, muss auch der Limes links für $x \to a$ existieren. □

Die in diesem Satz formulierte Eigenschaft, die zur Differenzierbarkeit äquivalent ist, nennt man auch die *lineare Approximierbarkeit*. Die affin-lineare Funktion

$$D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(a) + f'(a)(x-a),$$

heißt dabei die *affin-lineare Approximation*. Die durch $f(a)$ gegebene konstante Funktion kann man als konstante Approximation ansehen.

KOROLLAR 19.6. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein Punkt und*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die im Punkt a differenzierbar sei. Dann ist f stetig in a.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 19.5. □

Rechenregeln für differenzierbare Funktionen

LEMMA 19.7. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein Punkt und*

$$f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei Funktionen, die in a differenzierbar seien. Dann gelten folgende Differenzierbarkeitsregeln.

(1) *Die Summe $f + g$ ist differenzierbar in a mit*
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)\,.$$
(2) *Das Produkt $f \cdot g$ ist differenzierbar in a mit*
$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\,.$$

(3) *Für* $c \in \mathbb{R}$ *ist auch* cf *in* a *differenzierbar mit*

$$(cf)'(a) = cf'(a)\,.$$

(4) *Wenn* g *keine Nullstelle in* D *besitzt, so ist* $1/g$ *differenzierbar in* a *mit*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^2}\,.$$

(5) *Wenn* g *keine Nullstelle in* D *besitzt, so ist* f/g *differenzierbar in* a *mit*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}\,.$$

Beweis. (1). Wir schreiben f bzw. g mit den in Satz 19.5 formulierten Objekten, also

$$f(x) = f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(x) = g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)\,.$$

Summieren ergibt

$$f(x) + g(x) = f(a) + g(a) + (s+\tilde{s})(x-a) + (r+\tilde{r})(x)(x-a)\,.$$

Dabei ist die Summe $r + \tilde{r}$ wieder stetig in a mit dem Wert 0. (2). Wir gehen wieder von

$$f(x) = f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(x) = g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)$$

aus und multiplizieren die beiden Gleichungen. Dies führt zu

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a))(g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)) \\ &= f(a)g(a) + (sg(a) + \tilde{s}f(a))(x-a) \\ &\quad +(f(a)\tilde{r}(x) + g(a)r(x) + s\tilde{s}(x-a) \\ &\quad +s\tilde{r}(x)(x-a) + \tilde{s}r(x)(x-a) + r(x)\tilde{r}(x)(x-a))(x-a). \end{aligned}$$

Aufgrund von Lemma 15.10 für Limiten ist die aus der letzten Zeile ablesbare Funktion stetig mit dem Wert 0 für $x = a$. (3) folgt aus (2), da eine konstante Funktion differenzierbar ist mit Ableitung 0. (4). Es ist

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \frac{-1}{g(a)g(x)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x-a}\,.$$

Da g nach Korollar 19.6 stetig in a ist, konvergiert für $x \to a$ der linke Faktor gegen $-\frac{1}{g(a)^2}$ und wegen der Differenzierbarkeit von g in a konvergiert der rechte Faktor gegen $g'(a)$. (5) folgt aus (2) und (4). $\square$

Satz 19.8. *Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen und seien*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$g : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Es sei f in a differenzierbar und g sei in $b := f(a)$ differenzierbar. Dann ist auch die Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

in a differenzierbar mit der Ableitung

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) .$$

Beweis. Aufgrund von Satz 19.5 kann man

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(y) = g(f(a)) + g'(f(a))(y - f(a)) + s(y)(y - f(a))$$

schreiben. Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + s(f(x))(f(x) - f(a)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))(f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)) \\ &\quad + s(f(x))(f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)(x-a) + (g'(f(a))r(x) \\ &\quad + s(f(x))(f'(a) + r(x)))(x-a). \end{aligned}$$

Die hier ablesbare Restfunktion

$$t(x) := g'(f(a))r(x) + s(f(x))(f'(a) + r(x))$$

ist stetig in a mit dem Wert 0. □

Satz 19.9. *Es seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und sei*

$$f : D \longrightarrow E \subseteq \mathbb{R}$$

eine bijektive stetige Funktion mit der Umkehrfunktion

$$f^{-1} : E \longrightarrow D.$$

Es sei f in $a \in D$ differenzierbar mit $f'(a) \neq 0$. Dann ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} in $b := f(a)$ differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)} .$$

Beweis. Wir betrachten den Differenzenquotient

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(y) - a}{y - b}$$

und müssen zeigen, dass der Limes für $y \to b$ existiert und den behaupteten Wert annimmt. Sei dazu $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $E \setminus \{b\}$, die gegen b konvergiert. Nach Satz 16.4 ist f^{-1} stetig. Daher konvergiert auch die Folge mit den

Gliedern $x_n := f^{-1}(y_n)$ gegen a. Wegen der Bijektivität ist $x_n \neq a$ für alle n. Damit ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n)-a}{y_n-b} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n-a}{f(x_n)-f(a)} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}\right)^{-1},$$

wobei die rechte Seite nach Voraussetzung existiert. □

Beispiel 19.10. Die Funktion

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \longmapsto \sqrt{x},$$

ist die Umkehrfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^2$ (eingeschränkt auf $\mathbb{R}_+$). Deren Ableitung in einem Punkt a ist $f'(a) = 2a$. Nach Satz 19.9 gilt daher für $b \in \mathbb{R}_+$ die Beziehung

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{2\sqrt{b}} = \frac{1}{2}b^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Funktion

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^{\frac{1}{3}},$$

ist die Umkehrfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^3$ Deren Ableitung in a ist $f'(a) = 3a^2$, dies ist für $a \neq 0$ von 0 verschieden. Nach Satz 19.9 ist für $b \neq 0$ somit

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{3(b^{\frac{1}{3}})^2} = \frac{1}{3}b^{-\frac{2}{3}}.$$

Im Nullpunkt ist f^{-1} nicht differenzierbar.

Die Ableitungsfunktion

Bisher haben wir nur von der Differenzierbarkeit einer Funktion in einem Punkt gesprochen. Jetzt lösen wir uns von dieser punktweisen Betrachtung.

Definition 19.11. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *differenzierbar* ist, wenn für jeden Punkt $a \in I$ die Ableitung $f'(a)$ von f in a existiert. Die Abbildung

$$f' : I \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f'(x),$$

heißt die *Ableitung* (oder *Ableitungsfunktion*) von f.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Tangente2.gif , Autor = Benutzer Loveless auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 1