

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 27

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 27.1. Definiere eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{A}_K^{n+1} \setminus \{0\}$ derart, dass der Quotient unter der Äquivalenzrelation der projektive n -dimensionale Raum ist.

AUFGABE 27.2. Man definiere den Begriff *projektiv-linearer Unterraum* eines projektiven Raumes \mathbb{P}_K^n .

AUFGABE 27.3. Sei $\mathfrak{a} \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal. Zeige, dass \mathfrak{a} genau dann ein homogenes Ideal ist, wenn es von homogenen Elementen erzeugt wird.

AUFGABE 27.4. Sei $K = \mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper. Berechne auf zwei verschiedene Arten, wie viele Elemente der projektive Raum \mathbb{P}_K^n besitzt.

Die folgenden drei Aufgaben besprechen die Zariski-Topologie auf den projektiven Räumen.

AUFGABE 27.5. Zeige, dass die Zariski-Topologie auf dem projektiven Raum wirklich eine Topologie ist.

AUFGABE 27.6. Sei K ein unendlicher Körper und \mathbb{P}_K^n der projektive Raum. Charakterisiere die homogenen Ideale \mathfrak{a} , für die $D_+(\mathfrak{a}) = \emptyset$ ist.

AUFGABE 27.7. Sei K ein unendlicher Körper. Zeige, dass der projektive Raum \mathbb{P}_K^n irreduzibel ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 27.8. (3 Punkte)

Zeige, dass zwei verschiedene Punkte P und Q in der projektiven Ebene eindeutig eine projektive Gerade definieren, auf der beide Punkte liegen. Wie berechnet man die Geradengleichung aus den Koordinaten der Punkte?

Bestimme die homogene Geradengleichung für die beiden Punkte $(2, 3, 7)$ und $(1, 5, -2)$.

AUFGABE 27.9. (3 Punkte)

Es sei \mathbb{P}_K^n ein projektiver Raum der Dimension n und es seien $X, Y \subseteq \mathbb{P}_K^n$ projektiv-lineare Unterräume der Dimension r und s . Es sei $r + s \geq n$. Zeige, dass dann $X \cap Y \neq \emptyset$ ist.

AUFGABE 27.10. (3 Punkte)

Sei K ein unendlicher Körper und sei P_1, \dots, P_m eine endliche Ansammlung von Punkten in einem projektiven Raum \mathbb{P}_K^n . Zeige: Dann gibt es eine homogene Linearform $L \in K[X_0, \dots, X_n]$ derart, dass all diese Punkte auf der durch L definierten offenen Teilmenge $D_+(L)$ liegen.

Die nächste Aufgabe benötigt noch die folgende Definition:

Für ein homogenes Ideal I in $R = A[X_0, \dots, X_n]$ mit der Standardgraduierung definiert man die *Sättigung* (oder *Saturierung*) von I als

$$\{r \in R \mid \text{es existiert ein } n \text{ mit } r \cdot (R_+)^n \subseteq I\}.$$

Dabei ist R_+ das *irrelevante Ideal* $\bigoplus_{d \geq 1} R_d = (X_0, \dots, X_n)$.

AUFGABE 27.11. (3 Punkte)

Sei A ein kommutativer Ring und $R = A[X_0, \dots, X_n]$ der Polynomring mit der Standardgraduierung. Zeige, dass die Sättigung eines homogenen Ideals I wieder ein homogenes Ideal ist.

AUFGABE 27.12. (3 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei \mathfrak{m} ein maximales Ideal mit Lokalisierung $R_{\mathfrak{m}}$. Es sei \mathfrak{a} ein Ideal, dass unter der Lokalisierungsabbildung zum Kern gehört. Zeige, dass dann $R_{\mathfrak{m}}$ auch eine Lokalisierung von R/\mathfrak{a} ist.