Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 28

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 28.1. Sei $P = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{P}^n_K$ ein Punkt im projektiven Raum. Zeige, dass es eine offene affine Umgebung $U \cong \mathbb{A}^n_K \subset \mathbb{P}^n_K$ gibt derart, dass P in diesem affinen Raum dem Nullpunkt entspricht.

Aufgabe 28.2. Sei $D_+(L) \cong \mathbb{A}^n_K \subset \mathbb{P}^n_K$, wobei L eine homogene Linearform im zugehörigen Polynomring $K[X_0, \ldots, X_n]$ sei. Zeige, dass die Zariski-Topologie auf dem projektiven Raum die Zariski-Topologie auf dem affinen Raum induziert.

Aufgabe 28.3. Definiere zu jedem $n \in \mathbb{Z}$ das Potenzieren $x \mapsto x^n$ als Morphismus der projektiven Gerade auf sich selbst. Wie sehen die Fasern unter diesem Morphismus aus?

Aufgabe 28.4. Bestimme den projektiven Abschluss der durch

$$V((X^2+Y^2)^2 - 2X(X^2+Y^2) - Y^2)$$

gegebenen *Kardioide* über den komplexen Zahlen und insbesondere die „Punkte im Unendlichen“.

Aufgabe 28.5. Zeige, dass die Kegelabbildung

$$\mathbb{A}^{n+1}_K \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n_K$$

ein Morphismus von quasiprojektiven Varietäten ist.

Aufgabe 28.6. Zeige durch ein Beispiel, dass die Kegelabbildung

$$\mathbb{A}^{n+1}_K \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n_K$$

nicht abgeschlossen sein muss.

Aufgabe 28.7. Seien X und Y quasiprojektive Varietäten und sei $\varphi : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Es sei $Y = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Zeige, dass φ genau dann ein Morphismus ist, wenn die Einschränkungen $\varphi_i : \varphi^{-1}(U_i) \to U_i$ Morphismen sind für jedes i.

Aufgabe 28.8. Sei K ein Körper. Bestimme den globalen Schnittring

$$\Gamma(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O})\,.$$

Was folgt daraus für einen Morphismus $\mathbb{P}^1_K \to \mathbb{A}^1_K$?

Aufgabe 28.9. Man definiere und charakterisiere, wann eine irreduzible quasiprojektive Varietät *normal* ist.

Aufgabe 28.10.*

Sei K ein Körper. Betrachte die affine ebene Kurve

$$C = V(Y - X^3 + X + 2)\,.$$

Definiere einen Isomorphismus zwischen C und der affinen Geraden $\mathbb{A}^1_K$. Lässt sich ein solcher Isomorphismus zu einem Isomorphismus zwischen $\mathbb{P}^1_K$ und dem projektiven Abschluss $\bar{C} \subset \mathbb{P}^2_K$ fortsetzen?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 28.11. (3 Punkte)

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $= \mathbb{C}$. Es sei $H \subset \mathbb{K}^{n+1}$ ein n-dimensionaler affiner Unterraum, der den Nullpunkt nicht enthält, und es sei $\tilde{H}$ der dazu parallele Unterraum durch den Nullpunkt. Es sei $U \subseteq H$ eine in $H \cong \mathbb{K}^n$ offene Menge (in der metrischen Topologie) und es sei V die Menge aller Geraden durch den Nullpunkt und durch einen Punkt von U. Zeige, dass der Durchschnitt von V mit $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \tilde{H}$ offen ist.

Aufgabe 28.12. (4 Punkte)

Bestimme für die Kegelabbildung

$$\mathbb{A}^{n+1}_K \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n_K$$

den Zariski-Abschluss im $\mathbb{P}^n_K$ des Bildes einer abgeschlossenen Menge $V(\mathfrak{a}) \cap \mathbb{A}^{n+1}_K \setminus \{0\}$.

Aufgabe 28.13. (3 Punkte)

Sei X eine irreduzible quasiprojekive Varietät mit Funktionenkörper $L = K(X)$. Es seien U und U_i, $i \in I$, offene Teilmengen mit $U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Zeige, dass

$$\Gamma(U, \mathcal{O}) = \bigcap_{i \in I} \Gamma(U_i, \mathcal{O})$$

ist, wobei der Durchschnitt in L genommen wird.

Aufgabe 28.14. (3 Punkte)

Sei K ein Körper und $\mathbb{P}_K^n$ der projektive Raum. Zeige, dass die Konstanten die einzigen globalen algebraischen Funktionen sind, d.h. es gilt

$$\Gamma(\mathbb{P}_K^n, \mathcal{O}) = K \, .$$

Bemerkung: Diese Aussage gilt für jede zusammenhängende projektive Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 28.15. (5 Punkte)

Sei $F \in K[X,Y]$ ein irreduzibles Polynom und $R = K[X,Y]/(F)$ der integre Koordinatenring der ebenen Kurve $C = V(F)$. Es sei $R \to S = R^{\text{norm}}$ die Normalisierung von R und es sei $R \to K[[T]]$ der Ringhomomorphismus zu einer nichtkonstanten formalen Potenzreihenlösung der Kurve. Zeige, dass es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus $S \to K[[T]]$ gibt derart, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & S \\ & \searrow & \downarrow \\ & & K[[T]] \end{array}$$

kommutiert.

Aufgabe 28.16. (3 Punkte)

Zeige, dass in $K[X,Y]_{(X,Y)}/(X^2 - Y^3)$ jedes Ideal durch maximal zwei Erzeuger gegeben ist.

Aufgabe 28.17. (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer ebenen monomialen Kurve und eines Ideals im zugehörigen lokalen Ring der Singularität, das nicht von zwei Elementen erzeugt werden kann.