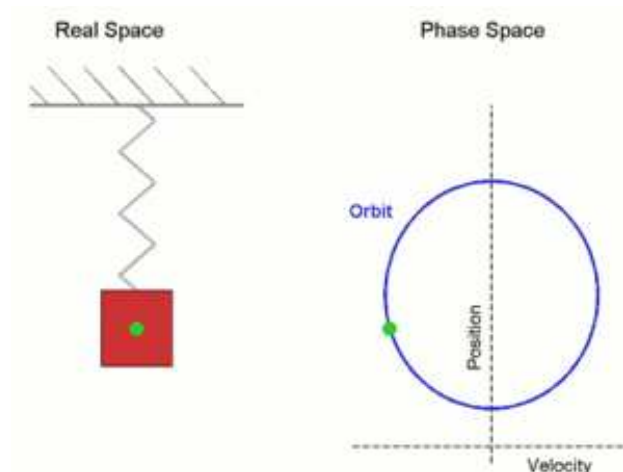


## Mathematik für Anwender II

### Vorlesung 38

#### Differentialgleichungen höherer Ordnung

Viele physikalische Bewegungsprozesse sind nicht dadurch determiniert, dass zu jedem Zeit- und Ortspunkt die Bewegungsrichtung (also die gerichtete Geschwindigkeit) vorgegeben wird, sondern dadurch, dass zu jedem Zeit- und Ortspunkt eine Kraft auf ein Teilchen wirkt, die dieses beschleunigt. In diesem Fall kann die Bewegung also nicht durch die erste Ableitung (Geschwindigkeit) modelliert werden, sondern durch die zweite Ableitung (Beschleunigung). Typische Beispiele hierzu sind die durch die Gravitation oder eine Federkraft hervorgerufenen Bewegungen.



BEISPIEL 38.1. Wir betrachten die Bewegung eines Punktes auf der Geraden, wobei die Lage des Punktes proportional zur auf ihn wirkenden Kraft (bzw. Beschleunigung) in Richtung des Nullpunkts sein soll. Wenn der Punkt sich in  $\mathbb{R}_+$  befindet und sich in die positive Richtung bewegt, so wirkt diese Kraft bremsend, wenn er sich in die negative Richtung bewegt, so wirkt die Kraft beschleunigend. Mit der Proportionalitätskonstante 1 gelangt man zur linearen Differentialgleichung (zweiter Ordnung)

$$y'' = -y,$$

die diesen Bewegungsvorgang beschreibt. Als Anfangsbedingung wählen wir  $y(0) = 0$  und  $y'(0) = v$ , zum Zeitpunkt 0 soll die Bewegung also durch den

Nullpunkt gehen und dort die Geschwindigkeit  $v$  besitzen. Man kann sofort die Lösung

$$y(t) = v \cdot \sin t$$

angeben.

BEISPIEL 38.2. Ein Gegenstand der Masse  $m$  wird aus der Höhe losgelassen und fällt unter dem Einfluss der Gravitation zu Boden. Dabei wirkt auf den Körper einerseits die Gravitationskraft  $gm$  (die Erdbeschleunigung  $g$  nehmen wir für diesen Bewegungsvorgang als konstant an), die ihn beschleunigt, andererseits wird diese Beschleunigung durch den Luftwiderstand verringert. Nach einem physikalischen Gesetz ist die Reibung (bei relativ kleinen Geschwindigkeiten) proportional und entgegengesetzt zur Geschwindigkeit des Körpers. Es sei  $\beta$  der Reibungswiderstand, also dieser Proportionalitätsfaktor. Die auf den Körper (nach unten) wirkende Gesamtkraft ist daher

$$F(t) = gm - \beta y'(t).$$

Wegen  $y''(t) = \frac{F(t)}{m}$  gilt daher für diesen Bewegungsvorgang die Differentialgleichung

$$y'' = -\frac{\beta}{m}y' + g.$$

DEFINITION 38.3. Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und

$$g: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann nennt man den Ausdruck

$$y^{(n)} = g(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

eine *Differentialgleichung der Ordnung  $n$* .

Unter einer *Lösung einer Differentialgleichung höherer Ordnung* versteht man eine  $n$ -mal differenzierbare Funktion

$$y: J \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto y(t)$$

(wobei  $J \subseteq I$  ein offenes Teilintervall ist) derart, dass

$$y^{(n)}(t) = g(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

für alle  $t \in J$  gilt.

Differentialgleichungen beliebiger Ordnung können unter Inkaufnahme von neuen Variablen auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung zurückgeführt werden.

LEMMA 38.4. *Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und*

$$g: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine Funktion. Dann ist die Differentialgleichung höherer Ordnung*

$$y^{(n)} = g(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

über die Beziehung

$$v_i := y^{(i)}$$

äquivalent zum Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ g(t, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

*Beweis.* Wenn

$$y: J \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Lösung der Differentialgleichung höherer Ordnung

$$y^{(n)} = g(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

ist, so sind alle Funktionen  $v_i = y^{(i)}$  für  $i = 0, \dots, n-1$  differenzierbar, und es gilt  $v_i' = v_{i+1}$  für  $i = 0, \dots, n-2$  nach Definition und schließlich

$$\begin{aligned} v_{n-1}'(t) &= (y^{(n-1)})'(t) \\ &= y^{(n)}(t) \\ &= g(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \\ &= g(t, v_0(t), v_1(t), v_2(t), \dots, v_{n-1}(t)). \end{aligned}$$

Wenn umgekehrt

$$v: J \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Lösung des Differentialgleichungssystems zum Vektorfeld

$$\begin{aligned} f: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, v_0, \dots, v_{n-1}) &\longmapsto f(t, v_0, \dots, v_{n-1}) \\ &= (v_1, \dots, v_{n-1}, g(t, v_0, v_1, \dots, v_{n-1})), \end{aligned}$$

ist, so ergibt sich sukzessive aus den ersten  $n-1$  Gleichungen, dass  $y = v_0$   $n$ -mal differenzierbar ist, und die letzte Gleichung des Differentialgleichungssystems besagt gerade

$$y^{(n)}(t) = g(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)).$$

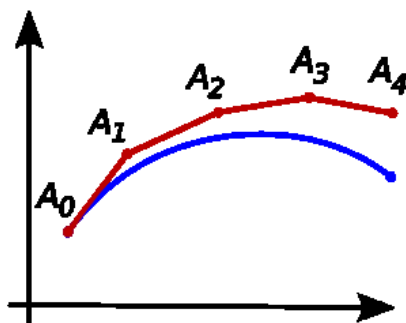
□

Mit dieser Umformung ist auch klar, wie sinnvolle Anfangsbedingungen für eine Differentialgleichung höherer Ordnung aussehen. Man muss nicht nur einen Startwert  $y(t_0) = w_0$ , sondern auch die höheren Ableitungen  $y'(t_0) = w_1$ ,  $y''(t_0) = w_2$ , usw. festlegen.

Es ist im Allgemeinen schwierig, eine Differentialgleichung explizit zu lösen. Wir besprechen daher zunächst zwei approximierende Verfahren, nämlich das *eulersche Polygonzugverfahren* und den *Potenzreihenansatz*.

## Polygonzugverfahren

Mit dem (eulerschen) Polygonzugverfahren wird die Lösungskurve einer Differentialgleichung diskret approximiert.



VERFAHREN 38.5. Es sei ein Vektorfeld

$$F: G \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

auf einer offenen Menge  $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  und eine Anfangsbedingung  $y(t_0) = P \in \mathbb{R}^n$  gegeben. Das *eulersche Polygonzugverfahren* funktioniert folgendermaßen: Man wählt eine Schrittweite  $s > 0$  und berechnet rekursiv die Punktfolge  $P_n$ , durch  $P_0 = P$  und

$$P_{n+1} = P_n + sF(t_0 + ns, P_n).$$

Zu einem schon konstruierten Punkt  $P_n$  wird also das  $s$ -fache des Richtungsvektors zum Zeitpunkt  $t_0 + ns$  an diesem Punkt hinzuaddiert. Dies funktioniert nur solange die Punkte im Definitionsbereich des Vektorfeldes liegen. Der zu dieser Punktfolge gehörende *Streckenzug* oder *Polygonzug*

$$\delta: \mathbb{R}_{\geq t_0} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ist die lineare Interpolation mit  $\delta(t_0 + ns) = P_n$ , d.h. für  $t$  mit  $t_0 + ns \leq t \leq t_0 + (n+1)s$  ist

$$\delta(t) = P_n + \frac{t - t_0 - ns}{s} (P_{n+1} - P_n).$$

Dieser Streckenzug  $\delta$  stellt eine stückweise lineare Approximation der Lösungskurve des Anfangswertproblems dar. Für eine kleinere Schrittweite wird die Approximation im Allgemeinen besser.

BEISPIEL 38.6. Bei einer ortsunabhängigen Differentialgleichung

$$y' = g(t)$$

ergibt sich  $y$  einfach als eine Stammfunktion zu  $g$ . Wendet man in dieser Situation Verfahren 38.5 zum Startzeitpunkt  $t_0$ , zum Startpunkt  $c$  und zur Schrittweite  $s$  an, so ergibt sich die rekursive Beziehung

$$P_0 = c \text{ und } P_{n+1} = P_n + sg(t_0 + ns).$$

Daher ist offenbar

$$P_n = c + s(g(t_0) + g(t_0 + s) + g(t_0 + 2s) + \dots + g(t_0 + (n-1)s)).$$

D.h. dass man zu dem Ausgangswert  $c$  das Treppenintegral zur äquidistanten Unterteilung  $t_0, t_0+s, t_0+2s, \dots, t_0+(n-1)s$  (und zur durch  $g(t_0+ks)$  auf dem Teilintervall  $[t_0+ks, t_0+(k+1)s]$  gegebenen Treppenfunktion) hinzuaddiert. Der zugehörige Streckenzug ist das (stückweise lineare) Integral zu dieser Treppenfunktion.

BEISPIEL 38.7. Wir wollen für das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - ty \\ txy \end{pmatrix} = F(t, x, y)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gemäß Verfahren 38.5 einen approximierenden Streckenzug berechnen. Wir wählen die Schrittweite  $s = \frac{1}{10}$ . Somit ist

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{10}F(0, P_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 + \frac{1}{10}F\left(\frac{1}{10}, P_1\right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \left(\frac{11}{10}\right)^2 - \frac{1}{10} \cdot 1 \\ \frac{1}{10} \cdot \frac{11}{10} \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \frac{111}{100} \\ \frac{11}{100} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1211}{1000} \\ \frac{1011}{1000} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P_3 &= P_2 + \frac{1}{10}F\left(\frac{2}{10}, P_2\right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1211}{1000} \\ \frac{1011}{1000} \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \left(\frac{1211}{1000}\right)^2 - \frac{2}{10} \cdot \frac{1011}{1000} \\ \frac{2}{10} \cdot \frac{1211}{1000} \cdot \frac{1011}{1000} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1211}{1000} \\ \frac{1011}{1000} \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \frac{1264321}{1000000} \\ \frac{2448642}{10000000} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{133743210}{100000000} \\ \frac{103548642}{100000000} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### Potenzreihenansatz

Nicht alle Differentialgleichungen sind explizit lösbar, und selbst wenn es eine explizite Lösung gibt, so ist es häufig schwierig, diese zu finden. Statt der vollen Information einer Lösungskurve begnügt man sich häufig mit der Teilinformation, die in der Taylor-Entwicklung der Kurve (bis zu einem bestimmten Grad) enthalten ist, d.h. man bestimmt gewisse Ableitungen der Kurve zu einem bestimmten Zeit- und Ortspunkt. Diese Information kann man häufig direkt aus der Differentialgleichung ablesen, ohne die Lösungskurve zu bestimmen. Diese Vorgehensweise setzt voraus, dass das Vektorfeld durch „analytische“ (beispielsweise polynomiale) Daten gegeben ist.

VERFAHREN 38.8. Es sei ein Anfangswertproblem

$$x' = F(t, x) \text{ mit } x(0) = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$$

zu einem Vektorfeld

$$F: I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

gegeben, wobei die Komponentenfunktionen  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , polynomial (oder durch Potenzreihen gegeben) seien. Dann lässt sich ein *Potenzreihenansatz* für die Lösung durchführen. Das bedeutet, dass man den Ansatz

$$x_i = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ki} t^k$$

mit unbestimmten Koeffizienten  $a_{ki}$  macht, und diese Koeffizienten (bis zu einem gewünschten Grad) aus den  $n$  Gleichungen

$$x'_i(t) = F_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$$

sukzessive bestimmt. Die Anfangsbedingung

$$x_i(0) = a_{0i} = c_i$$

legt dabei die konstanten Koeffizienten fest. In das Differentialgleichungssystem werden die Potenzreihen links und rechts eingesetzt und ausgewertet, wobei die Ableitung links formal zu nehmen ist und rechts die Reihen formal zu addieren und zu multiplizieren sind. Dies ergibt Gleichungen für Potenzreihen in  $t$ , die durch Koeffizientenvergleich, beginnend mit den Koeffizienten von kleinem Grad, gelöst werden können.

BEISPIEL 38.9. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 t - y + t^3 + e^t \text{ mit } y(0) = 0$$

und wollen es mit einem Potenzreihenansatz lösen. Sei also

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k,$$

die auszuwertende Potenzreihengleichung ist somit

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right)' &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} \\ &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right)^2 t - \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k + t^3 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k. \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung legt  $a_0 = 0$  fest. Für den konstanten Term (also zu  $t^0$ ) ergibt sich aus der Potenzreihengleichung

$$a_1 = -a_0 + 1 = 1.$$

Für  $t^1$  ergibt sich

$$2a_2 = a_0^2 - a_1 + 1 = 0.$$

Für  $t^2$  ergibt sich

$$3a_3 = 2a_0 a_1 - a_2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

also ist  $a_3 = \frac{1}{6}$ . Für  $t^3$  ergibt sich

$$4a_4 = 2a_0 a_2 + a_1^2 - a_3 + 1 + \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{6} + 1 + \frac{1}{6} = 2,$$

also ist  $a_4 = \frac{1}{2}$ . Für  $t^4$  ergibt sich

$$5a_5 = 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2 - a_4 + \frac{1}{24} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{24} = -\frac{11}{24},$$

also ist  $a_5 = -\frac{11}{120}$ . Die Taylor-Entwicklung der Lösungskurve bis zur Ordnung 5 ist demnach

$$t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{11}{120}t^5.$$

BEISPIEL 38.10. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} tx - y^2 \\ xy - t^2 \end{pmatrix} \text{ mit } x(0) = 0 \text{ und } y(0) = 1$$

und machen den Potenzreihenansatz  $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$  und  $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ . Aufgrund der Anfangsbedingung ist

$$a_0 = 0 \text{ und } b_0 = 1.$$

Das Differentialgleichungssystem führt auf die beiden Potenzreihengleichungen

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} = t \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) - \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \right)^2$$

und

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k t^{k-1} = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \right) - t^2,$$

die wir gradweise auswerten. Für den Grad 0 (der Potenzreihengleichungen) ergeben sich daraus die beiden Gleichungen

$$a_1 = -b_0^2 = -1 \text{ und } b_1 = a_0 b_0 = 0.$$

Für den Grad 1 ergeben sich daraus die beiden Gleichungen

$$2a_2 = a_0 - 2b_0 b_1 = 0 \text{ und } 2b_2 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = -1,$$

also ist  $a_2 = 0$  und  $b_2 = -\frac{1}{2}$ . Für den Grad 2 ergeben sich daraus die beiden Gleichungen

$$3a_3 = a_1 - 2b_0 b_2 - b_1^2 = -1 + 1 = 0 \text{ und } 3b_3 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 - 1 = -1,$$

also ist  $a_3 = 0$  und  $b_3 = -\frac{1}{3}$ . Für den Grad 3 ergeben sich daraus die beiden Gleichungen

$$4a_4 = a_2 - 2b_0 b_3 - 2b_1 b_2 = \frac{2}{3} \text{ und } 4b_4 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = \frac{1}{2},$$

also ist  $a_4 = \frac{1}{6}$  und  $b_4 = \frac{1}{8}$ . Die Taylor-Entwicklung der Lösungskurve bis zur Ordnung 4 ist demnach

$$\left( -t + \frac{1}{6}t^4, 1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{8}t^4 \right).$$

**BEMERKUNG 38.11.** Eine Differentialgleichung höherer Ordnung

$$y^{(n)} = g(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

kann man entsprechend Bemerkung 38.8 mit einem *Potenzreihenansatz*, also mit einem Ansatz der Form

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

mit unbestimmten Koeffizienten  $a_k$ , (bis zu einer gewissen Ordnung) lösen. Dazu muss die Funktion  $g$  polynomial (oder durch eine Potenzreihe gegeben) sein. Damit die Lösung eindeutig ist, müssen zusätzlich Anfangsbedingungen

$$y(0) = b_0, y'(0) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = b_{n-1}$$

vorgegeben sein. Die Koeffizienten  $a_k$  werden sukzessive unter Verwendung der Differentialgleichung und der Anfangsbedingungen gelöst.

**BEISPIEL 38.12.** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'' = y'y + \sin t \text{ mit } y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 1$$

und wollen es mit einem Potenzreihenansatz lösen. Sei also

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k,$$

die auszuwertende Potenzreihengleichung ist somit

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right)'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-2}$$



$$= \left( \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1}.$$

Die Anfangsbedingung legt  $a_0 = 0$  und  $a_1 = 1$  fest. Für den konstanten Term (also zu  $t^0$ ) ergibt sich aus der Potenzreihengleichung

$$2a_2 = a_1 a_0 = 0,$$

also ist  $a_2 = 0$ . Für  $t^1$  ergibt sich

$$6a_3 = a_1^2 + 2a_2 a_0 + 1 = 2$$

also ist  $a_3 = \frac{1}{3}$ . Für  $t^2$  ergibt sich

$$12a_4 = a_1 a_2 + 2a_2 a_1 + 3a_3 a_0 = 0,$$

also ist  $a_4 = 0$ . Für  $t^3$  ergibt sich

$$20a_5 = a_1 a_3 + 2a_2^2 + 3a_3 a_1 + 4a_4 a_0 - \frac{1}{6} = \frac{4}{3} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6},$$

also ist  $a_5 = \frac{7}{120}$ . Die Taylor-Entwicklung der Lösungskurve bis zur Ordnung 5 ist demnach

$$t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{120}t^5.$$



## Abbildungsverzeichnis

Quelle = Simple Harmonic Motion Orbit.gif , Autor = Benutzer Mazemaster auf Commons, Lizenz = PD	1
Quelle = Euler method.png , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD	4