

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 45

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 45.1. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^3y - x^2, x^4y^2 - 3xy^3 + 5y).$$

AUFGABE 45.2. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \longmapsto (x^2yz^3 - \sin x, \exp(x^4y) - 2x^2z^3 \cos(xy^2z)).$$

AUFGABE 45.3. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{x}{y}.$$

AUFGABE 45.4. Bestimme sämtliche höheren Richtungsableitungen der Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2y^3 - x^3y,$$

die sich mit den beiden Standardrichtungen $(1, 0)$ und $(0, 1)$ ausdrücken lassen.

AUFGABE 45.5. Zeige, dass eine Polynomfunktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar ist.

AUFGABE 45.6. Es seien V und W euklidische Vektorräume, $G \subseteq V$ offen und

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

eine n -mal stetig differenzierbare Abbildung. Es sei v_1, \dots, v_n eine Auswahl von n Vektoren aus V . Zeige, dass dann für jede Permutation $\sigma \in S_n$ die Gleichheit

$$D_{v_n}(\dots D_{v_2}(D_{v_1}\varphi)) = D_{v_{\sigma(n)}}(\dots D_{v_{\sigma(2)}}(D_{v_{\sigma(1)}}\varphi))$$

gilt.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 45.7. (3 Punkte)

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (\sin xy, x^2y^3z^4 - y \sinh z, xy^2z + 5).$$

AUFGABE 45.8. (3 Punkte)

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy^3 - x^2y^2 - 4y^2.$$

Berechne die Richtungsableitung dieser Abbildung in einem Punkt (x, y) in Richtung $(2, 5)$. Bestätige, dass sich diese Richtungsableitung auch ergibt, wenn man die Jacobi-Matrix auf den Vektor $(2, 5)$ anwendet.

AUFGABE 45.9. (3 Punkte)

Zeige, dass keine partiell differenzierbare Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

existiert, so dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = xy \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y^2$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt.

AUFGABE 45.10. (4 Punkte)

Sei

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Polynomfunktion. Zeige, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass sämtliche k -ten Richtungsableitungen null sind.

AUFGABE 45.11. (6 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

zweimal partiell differenzierbar ist, und dass

$$D_1D_2f(0, 0) \neq D_2D_1f(0, 0)$$

gilt.