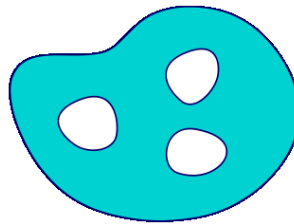


## Mathematik III

### Vorlesung 88

#### Mannigfaltigkeiten mit Rand



Eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Der Rand besteht aus den vier geschlossenen Bögen.

DEFINITION 88.1. Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $k \in \overline{\mathbb{N}}_+$ . Ein topologischer Hausdorff-Raum  $M$  zusammen mit einer offenen Überdeckung  $M = \bigcup_{i \in I} U_i$  und Karten

$$\alpha_i : U_i \longrightarrow V_i,$$

wobei die  $V_i \subseteq H \subset \mathbb{R}^n$  offene Mengen im euklidischen Halbraum der Dimension  $n$  sind, und mit der Eigenschaft, dass die Übergangsabbildungen

$$\alpha_j \circ \alpha_i^{-1} : V_i \cap \alpha_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow V_j \cap \alpha_j(U_i \cap U_j)$$

$C^k$ -Diffeomorphismen sind, heißt  $C^k$ -Mannigfaltigkeit mit Rand oder differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand (vom Grad  $k$ ), oder berandete Mannigfaltigkeit. Die Menge der Karten  $(U_i, \alpha_i)$ ,  $i \in I$ , nennt man auch den  $C^k$ -Atlas der berandeten Mannigfaltigkeit.

Da auch offene Mengen im Halbraum zugelassen sind, die den Rand gar nicht treffen, umfasst dieser Begriff den der differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Bei einer Mannigfaltigkeit mit Rand kann der Rand (den wir gleich in naheliegender Weise definieren) auch leer sein. Dies ist genau bei den „gewöhnlichen“ differenzierbaren Mannigfaltigkeiten der Fall.

DEFINITION 88.2. Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist der Rand von  $M$ , geschrieben  $\partial M$ , definiert als

$$\partial M = \{x \in M \mid \alpha_i(x) \in \partial H \cap V_i \text{ für ein } i \in I\}.$$

Dabei kann man auf jeder Karte testen, ob ein gegebener Punkt ein Randpunkt ist.

LEMMA 88.3. Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand  $\partial M$ . Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) Ein Punkt  $P \in M$  ist genau dann ein Randpunkt, wenn dies für jede Karte gilt.
- (2) Der Rand  $\partial M$  ist abgeschlossen.
- (3) Das Komplement  $M \setminus \partial M$  ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (ohne Rand).

*Beweis.* (1). Es sei  $P \in M$  und  $P \in U$  ein Kartengebiet mit zwei Karten

$$\alpha_1 : U \longrightarrow V_1$$

und

$$\alpha_2 : U \longrightarrow V_2$$

mit  $V_1 \subseteq H_1$  und  $V_2 \subseteq H_2$  offen in euklidischen Halbräumen  $H_1, H_2 \cong \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Die Kartenwechselabbildung  $\varphi = \alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}$  ist ein Diffeomorphismus, und das heißt für jeden Punkt  $Q \in V_1$ , dass es offene Umgebungen  $W_1$  und  $W_2$  in  $\mathbb{R}^n$  gibt mit  $Q \in W_1$  und eine diffeomorphe Ausdehnung

$$\tilde{\varphi} : W_1 \longrightarrow W_2$$

von  $\varphi|_{W_1 \cap H_1}$ . Daher ist  $\tilde{\varphi}(H_1^+ \cap W_1)$  offen in  $W_2$ .

Sei nun  $Q_1 = \alpha_1(P)$  und  $W_1, W_2, \tilde{\varphi}$  mit den eben erwähnten Eigenschaften gewählt. Wenn  $Q_1$  kein Randpunkt in der ersten Karte ist, so ist  $Q_1 \in H_1^+ \cap W_1$  eine offene Umgebung und damit ist  $\alpha_2(P) \in \tilde{\varphi}(H_1^+ \cap W_1)$  eine offene Umgebung in  $W_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ferner ist  $\tilde{\varphi}(H_1^+ \cap W_1) \subseteq H_2$ . D.h.  $\alpha_2(P) \in H_2$  besitzt eine in  $\mathbb{R}^n$  offene Umgebung innerhalb von  $H_2$  und kann daher auch in der zweiten Karte kein Randpunkt sein. (2). Sei  $P \notin \partial M$  und sei  $P \in U$  ein Kartengebiet mit dem Homöomorphismus

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

mit  $V \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n-1} = H$  offen. Da  $P$  kein Randpunkt ist, ist die erste Komponente von  $\alpha(P)$  positiv und daher gibt es eine offene Menge  $\alpha(P) \in V' \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1} = H_+$ . Daher ist  $U' = \alpha^{-1}(V')$  eine offene Umgebung von  $P$ , die den Rand nicht trifft. (3). Für jeden Punkt  $P \notin \partial M$  kann man wie in (2) ein Kartengebiet angeben, das disjunkt zum Rand ist und dessen Kartenbild eine offene Menge im  $\mathbb{R}^n$  ist. Daher liegt eine Mannigfaltigkeit (ohne Rand) vor.  $\square$

Auch die Begriffe differenzierbare Abbildung und Tangentialraum übertragen sich auf eine Mannigfaltigkeit mit Rand.

**LEMMA 88.4.** *Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension  $n$ . Dann ist der Rand  $\partial M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (ohne Rand) der Dimension  $n - 1$ .*

*Beweis.* Zunächst ist  $L = \partial M$  mit der induzierten Topologie ein Hausdorff-Raum. Sei  $P \in L$  und sei

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

eine Karte mit  $V \subseteq H$  offen und  $\alpha(P) \in \partial H$ . Da  $\alpha$  eine Homöomorphie ist und da nach Lemma 88.3 bei jeder Karte Randpunkte zu Randpunkten korrespondieren, induziert dies eine Homöomorphie

$$U \cap L \longrightarrow V \cap \partial H.$$

Dabei ist  $U \cap L$  eine offene Umgebung von  $P$  in  $L$ , so dass wir diese Mengen als Kartengebiete nehmen können. Betrachten wir nun einen Kartenwechsel, wobei wir gleich von einem einzigen Kartengebiet  $U \subseteq M$  und zwei Karten  $\alpha_1 : U \rightarrow V_1$  und  $\alpha_2 : U \rightarrow V_2$  mit  $V_1, V_2 \subseteq H$  offen ausgehen können. Es liegt dann ein  $C^1$ -Diffeomorphismus

$$\varphi = \alpha_2 \circ \alpha_1^{-1} : V_1 \longrightarrow V_2$$

vor. Dies bedeutet zunächst, dass eine Homöomorphie  $\partial H \cap V_1 \rightarrow \partial H \cap V_2$  vorliegt. Die Diffeomorphieeigenschaft bedeutet für jeden Punkt  $P \in U \cap L$ , dass es offene Umgebungen  $\alpha_1(P) \in W_1 \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $\alpha_2(P) \in W_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  und eine diffeomorphe Fortsetzung

$$\tilde{\varphi} : W_1 \longrightarrow W_2$$

von  $\varphi$  von  $V_1 \cap W_1$  nach  $V_2 \cap W_2$  gibt. Diese Fortsetzung induziert dann Aufgabe 88.13 auch eine  $C^1$ -Diffeomorphie zwischen den Rändern  $\partial H \cap W_1$  und  $\partial H \cap W_2$ , so dass insgesamt eine Diffeomorphie

$$\varphi|_{\partial H} : \partial H \cap V_1 \longrightarrow \partial H \cap V_2$$

vorliegt. □

Wir wissen bereits, dass die Faser einer differenzierbaren regulären Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten die Struktur einer abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit trägt. Auf einem ähnlichen Argument beruht der folgende Satz, der die Existenz von sehr vielen berandeten Mannigfaltigkeiten sichert.

**SATZ 88.5.** *Es sei  $L$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und es sei*

$$f : L \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine stetig differenzierbare Funktion. Es sei  $a \in \mathbb{R}$ . Jeder Punkt der Faser  $F = f^{-1}(a)$  über  $a$  sei regulär. Dann sind die Teilmengen*

$$M = \{x \in L \mid f(x) \leq a\} \text{ und } N = \{x \in L \mid f(x) \geq a\}$$

*differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand, und zwar ist ihr Rand jeweils gleich  $F$ .*

*Beweis.* Zur Notationsvereinfachung sei  $a = 0$ , und wir beschränken uns auf  $M$ . Es ist

$$M = \{x \in L \mid f(x) < 0\} \uplus F,$$

wobei die linke Menge eine offene Menge von  $L$  und damit eine offene Untermannigfaltigkeit ist. Entscheidend ist also zu zeigen, dass es für die Punkte aus der Faser  $F$  Karten und damit eine Mannigfaltigkeitsstruktur gibt. Sei

also  $P \in F$ . Nach dem Beweis des Satzes über implizite Abbildungen gibt es zu  $P \in F$  eine offene (Karten)-Umgebung  $P \in U \subseteq L$  und eine Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V,$$

$V \subseteq \mathbb{R}^n$ , derart, dass  $f = x_1 \circ \alpha$  ist. Dabei korrespondiert  $F \cap U$  zu  $\{x \in V \mid x_1 = 0\}$  und  $M \cap U$  zu  $H_{\leq 0} \cap V$ , so dass also die Einschränkung von  $\alpha$  auf  $M$  eine Karte für  $M$  in  $P$  liefert. Die Kartenwechsel sind dabei  $C^1$ -diffeomorph, da dies für die (vollen) Karten auf  $L$  gilt.  $\square$

BEISPIEL 88.6. Die abgeschlossene Kugel

$$B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq r\}$$

ist eine  $C^\infty$ -differenzierbare Mannigfaltigkeit mit der *Sphäre*

$$S(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = r\}$$

als Rand. Dies folgt unmittelbar aus Satz 88.5 angewendet auf die differenzierbare Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

die in jedem Punkt  $\neq 0$  regulär ist.

BEISPIEL 88.7. Ein abgeschlossener *Quader*

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$$

ist bei  $n \geq 2$  keine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand, da er nicht nur Seiten, sondern auch (je nach Dimension) Ecken und Kanten besitzt. Ein Rechteck besitzt vier Eckpunkte, denen man nicht die Struktur einer (mit dem umgebenden Raum verträglichen) differenzierbaren berandeten Mannigfaltigkeit geben kann (da das abgeschlossene Rechteck homöomorph zur abgeschlossenen Kreisscheibe ist, kann man darauf die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit Rand erklären; mit dieser Struktur ist aber die natürliche Einbettung in den  $\mathbb{R}^n$  nicht differenzierbar), ein dreidimensionaler Quader besitzt zwölf Kanten und acht Ecken, an denen es keine natürliche Mannigfaltigkeitsstruktur gibt.

Wenn man allerdings diese Ecken, Kanten etc. entfernt und nur die „Seiten der Kodimension eins“ beibehält, so bekommt man eine (nicht kompakte) Mannigfaltigkeit mit Rand. Der Rand ist dabei die disjunkte Vereinigung dieser Hyper-Seiten. Dieser Rand ist, wie bei jeder Mannigfaltigkeit mit Rand, abgeschlossen innerhalb der Mannigfaltigkeit, allerdings nicht abgeschlossen im umgebenden euklidischen Raum.

## Orientierungen auf Mannigfaltigkeiten mit Rand

Der  $\mathbb{R}^n$  sei mit der durch die Standardvektoren  $e_1, \dots, e_n$  gegebenen Orientierung versehen, ferner sei der Halbraum

$$H_{\leq 0} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq 0\}$$

als der „innere Halbraum“ ausgezeichnet. Dann nennt man die auf der Hyperebene (also dem Rand der berandeten Mannigfaltigkeit  $H_{\leq 0}$ )

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$$

durch die Basis  $e_2, \dots, e_n$  definierte Orientierung die *Orientierung durch die äußere Normale*. Eine beliebige Basis  $v_2, \dots, v_n$  von  $E$  repräsentiert diese Orientierung genau dann, wenn für einen beliebigen Vektor  $v \in H_+$  (das bedeutet, nach „außen“, also raus aus dem Halbraum zu zeigen) die Basis  $v, v_2, \dots, v_n$  (also  $v$  zuerst) von  $\mathbb{R}^n$  die Ausgangsorientierung repräsentiert.

Dieser Zusammenhang zwischen Orientierungen auf einem reellen Vektorraum und Orientierungen auf dem Rand eines Halbraumes überträgt sich auf Mannigfaltigkeiten mit Rand. Wichtig ist dabei, dass der Tangentialraum  $T_P M$  in einem Randpunkt  $P$  eine kanonische Hyperebene enthält, nämlich den Tangentialraum  $T_P(\partial M)$  des Randes. Die Mannigfaltigkeit definiert dabei eine „innere“ und eine „äußere Hälfte“ des Tangentialraumes.

**SATZ 88.8.** *Es sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand, die eine Orientierung trage. Dann trägt auch die Randmannigfaltigkeit eine kanonische Orientierung, nämlich diejenige, die auf jeder Karte durch die äußere Normale festgelegt ist.*

*Beweis.* Für jede (orientierte) Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

zu  $U \subseteq M$  offen wird die induzierte Karte

$$U \cap \partial M \longrightarrow V \cap \partial H$$

mit der Orientierung durch die äußere Normale auf  $\partial H$  versehen. Nach Voraussetzung besitzen sämtliche Kartenwechsel zu  $M$  in jedem Punkt eine positive Fundamentaldeterminante bzgl. den die Orientierungen repräsentierenden Basen, und wir müssen zeigen, dass dies auch für die induzierten Kartenwechsel gilt. Dabei können wir von einem offenen Kartengebiet  $P \in U \subseteq M$  und zwei Karten

$$\alpha_1 : U \longrightarrow V_1$$

und

$$\alpha_2 : U \longrightarrow V_2$$

ausgehen und die Übergangsabbildung

$$\varphi = \alpha_2 \circ \alpha_1^{-1} : V_1 \longrightarrow V_2$$

mit offenen Mengen  $V_1 \subseteq H_1 \subset \mathbb{R}^n$  und  $V_2 \subseteq H_2 \subset \mathbb{R}^n$  betrachten. Es sei  $v_2, \dots, v_n$  eine Basis von  $\partial H_1$  und  $v_1 \in \mathbb{R}^n$  derart, dass  $v_1$  die äußere Normale von  $H_1$  repräsentiert, dass also  $v_1, v_2, \dots, v_n$  die Orientierung des  $\mathbb{R}^n$  repräsentiert (es seien  $x_1, \dots, x_n$  die zugehörigen Koordinaten); ebenso sollen  $w_1, w_2, \dots, w_n \in H_2$  die entsprechenden Eigenschaften erfüllen. Wir schreiben die Fundamentalmatrix von  $\varphi$  bzgl. diesen Basen hin, also die Matrix mit den Einträgen

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(Q)\right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Die Determinante davon ist nach Voraussetzung positiv. Wegen  $\varphi(\partial H_1) \subseteq \partial H_2$  gilt für einen Punkt  $Q \in \partial H_1$  die Beziehung

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(Q) = 0$$

für  $j = 2, \dots, n$ . Nach dem Entwicklungssatz hängt daher das Vorzeichen der Determinante der Matrix

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(Q)\right)_{2 \leq i, j \leq n},$$

die die Fundamentalmatrix der Übergangsabbildung der Randkarten

$$U_1 \cap \partial H_1 \longrightarrow U_2 \cap \partial H_2$$

(bzgl. den Basen  $v_2, \dots, v_n$  und  $w_2, \dots, w_n$ ) im Punkt  $Q$  ist, nur von  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(Q)$  ab. Dabei gilt mit  $Q = (0, a_2, \dots, a_n)$  nach Lemma 43.2 die Beziehung

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(Q) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi_1(\epsilon, a_2, \dots, a_n)}{\epsilon}.$$

Da  $v_1$  die äußere Normale repräsentiert, ist bei negativem (betragsmäßig hinreichend kleinen)  $\epsilon$  der Vektor mit den Koordinaten  $(\epsilon, a_2, \dots, a_n) \in H_1$ . Daher muss der Bildvektor zu  $H_2$  gehören und daher ist wiederum  $\varphi_1(\epsilon, a_2, \dots, a_n) < 0$ . Also ist dieser Quotient  $\geq 0$ , was dann auch für den Limes gilt. Da ein Diffeomorphismus vorliegt, muss der Limes sogar positiv sein, woraus die Aussage folgt.  $\square$

## Abbildungsverzeichnis

Quelle = Runge theorem.svg, Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD

1