Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 34

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 34.1. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto f(t) = \left(t^2 - \sin t\, , e^{-t} + 2t^3, t \cdot \sinh t + \frac{1}{t^2+1} \right),$$

in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 34.2. Skizziere die Bilder und die Graphen der folgenden Kurven im $\mathbb{R}^2$.

(1) $t \longmapsto (t^2, t^2)$,
(2) $t \longmapsto (t^2, -t^2)$,
(3) $t \longmapsto (t^2, t)$,
(4) $t \longmapsto (2t, 3t)$,
(5) $t \longmapsto (t^2, t^3)$.

Aufgabe 34.3. Sei V ein euklidischer Vektorraum und $v, w \in W$. Zeige, dass die Abbildung

$$f:\mathbb{R} \longrightarrow V,\ t \longmapsto tv + w,$$

differenzierbar ist mit der Ableitung $f'(t) = v$.

Aufgabe 34.4. Es sei I ein reelles Intervall und V ein euklidischer Vektorraum. Es seien

$$f, g : I \longrightarrow V$$

zwei in $t_0 \in I$ differenzierbare Kurven und es sei

$$h : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in t_0 differenzierbare Funktion. Zeige, dass folgende Aussagen gelten.

(1) Die Summe

$$f + g : I \longrightarrow V,\ t \longmapsto f(t) + g(t),$$

ist in t_0 differenzierbar mit

$$(f+g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0)\, .$$

(2) Das Produkt

$$hf : I \longrightarrow V,\ t \longmapsto h(t)f(t),$$

ist differenzierbar in t_0 mit

$$(hf)'(t_0) = h(t_0)f'(t_0) + h'(t_0)f(t_0)\,.$$

Insbesondere ist für $c \in \mathbb{R}$ auch cf differenzierbar in t_0 mit

$$(cf)'(t_0) = cf'(t_0)\,.$$

(3) Wenn h nullstellenfrei ist, so ist auch die Quotientenfunktion

$$\frac{f}{h} : I \longrightarrow V,\ t \longmapsto \frac{f(t)}{h(t)},$$

in t_0 differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{h}\right)'(t_0) = \frac{h(t_0)f'(t_0) - h'(t_0)f(t_0)}{(h(t_0))^2}\,.$$

Aufgabe 34.5. Sei (M,d) ein metrischer Raum, sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge und sei $a \in M$ ein Berührpunkt von T. Es sei

$$f : T \longrightarrow V$$

eine Abbildung in einen euklidischen Vektorraum V mit den Komponentenfunktionen

$$f_1, \ldots, f_n : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

bezüglich einer Basis von V. Zeige, dass der Limes

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

genau dann existiert, wenn sämtliche Limiten

$$\lim_{x \to a} f_j(x)$$

existieren.

Aufgabe 34.6. Es seien

$$x, y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

zwei differenzierbare Kurven. Berechne die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \langle x(t), y(t) \rangle.$$

Aufgabe 34.7. Betrachte die differenzierbare Kurve

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t^3, e^t).$$

Bestimme einen Kreis (mit Mittelpunkt und Radius) und eine Parametrisierung ψ dieses Kreises derart, dass ψ und φ für $t = 1$ bis zur zweiten Ableitung übereinstimmen.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 34.8. (3 Punkte)
Bestimme die Ableitung der Kurve

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, t \longmapsto \left(\frac{\sin t^2}{t^5}, 4^t, \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \right),$$

für jeden Punkt $t \in \mathbb{R}_+$.

Aufgabe 34.9. (4 Punkte)
Betrachte die Kurve

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, x \longmapsto (x^2 - x, x^3 + \sinh x\,,\, \sin (x^2)\,).$$

a) Bestimme die Ableitung von f in jedem Punkt x.

b) Bestimme die Komponentenfunktionen von f bezüglich der neuen Basis

$$(1,0,3), (2,4,6), (1,-1,0)$$

von $\mathbb{R}^3$.

c) Berechne die Ableitung in der neuen Basis direkt und mit Hilfe von Fakt *****.

Aufgabe 34.10. (3 Punkte)
Für welche Punkte $t \in \mathbb{R}$ ist der Abstand der Bildpunkte der Kurve

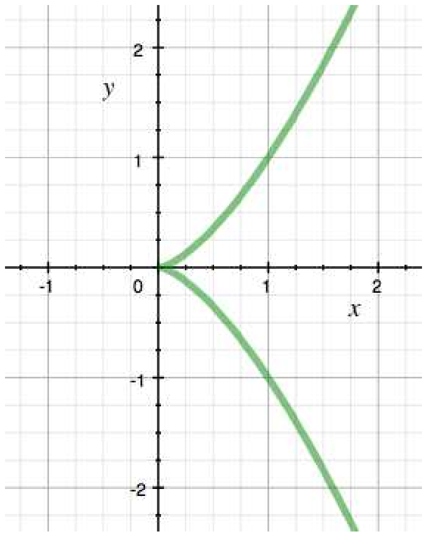
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, t \longmapsto (2 \sin t\,, 3 \cos t\,),$$

zum Nullpunkt $(0,0)$ maximal, für welche minimal?

Aufgabe 34.11. Es seien $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^2$ endlich viele Punkte und sei $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}$. Zeige, dass es zu je zwei Punkten $P, Q \in M$ eine differenzierbare Kurve

$$\varphi : [0,1] \longrightarrow M$$

mit $\varphi(0) = P$ und $\varphi(1) = Q$ gibt.



Aufgabe 34.12. (4 Punkte)

Das Bild der durch

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t^2, t^3),$$

definierten Kurve heißt *Neilsche Parabel*. Zeige, dass ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau dann zu diesem Bild gehört, wenn er die Gleichung $x^3 = y^2$ erfüllt.

Aufgabe 34.13. (5 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \subseteq \mathbb{R}^2,$$

die einem Punkt $t \in \mathbb{R}$ den eindeutigen Schnittpunkt $\neq (0, -1)$ der durch die beiden Punkte $(t, 1)$ und $(0, -1)$ gegebenen Geraden G_t mit dem Einheitskreis

$$S^1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

zuordnet. Zeige, dass diese Abbildung wohldefiniert ist und bestimme die funktionalen Ausdrücke, die diese Abbildung beschreiben. Zeige, dass f differenzierbar ist. Ist f injektiv, ist f surjektiv?

Abbildungsverzeichnis