

## Mathematik I

### Vorlesung 25

#### Der große Umordnungssatz

SATZ 25.1. (Großer Umordnungssatz) Es sei  $a_i$ ,  $i \in I$ , eine summierbare Familie von komplexen Zahlen mit der Summe  $s$ . Es sei  $J$  eine weitere Indexmenge und zu jedem  $j \in J$  sei eine Teilmenge  $I_j \subseteq I$  gegeben mit  $\bigcup_{j \in J} I_j = I$  und  $I_j \cap I_{j'} = \emptyset$  für  $j \neq j'$ .<sup>1</sup> Dann sind die Teilfamilien  $a_i$ ,  $i \in I_j$ , summierbar und für ihre Summen  $s_j = \sum_{i \in I_j} a_i$  gilt, dass die Familie  $s_j$ ,  $j \in J$ , summierbar ist mit

$$s = \sum_{j \in J} s_j.$$

*Beweis.* Die Summierbarkeit der Teilfamilien folgt aus Korollar 24.16. Es sei  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Da die Ausgangsfamilie summierbar ist, gibt es eine endliche Teilmenge  $E_0 \subseteq I$  mit

$$|a_E - s| \leq \epsilon/2$$

für alle endlichen Teilmengen  $E \subseteq I$  mit  $E_0 \subseteq E$ . Es gibt eine endliche Teilmenge  $F_0 \subseteq J$  derart, dass

$$E_0 \subseteq \bigcup_{j \in F_0} I_j$$

ist. Wir behaupten, dass dieses  $F_0$  für die Familie  $s_j$ ,  $j \in J$ , die Summationseigenschaft für  $\epsilon$  erfüllt. Sei dazu  $F \subseteq J$  mit  $F_0 \subseteq F$  endlich und  $n = \#(F)$ . Da die Familien  $a_i$ ,  $i \in I_j$ , summierbar sind mit den Summen  $s_j$ , gibt es für jedes  $j \in F$  ein endliches  $G_{j,0} \subseteq I_j$  mit

$$|a_{G_j} - s_j| \leq \epsilon/2n$$

für alle endlichen  $G_j \subseteq I_j$  mit  $G_{j,0} \subseteq G_j$ . Wir wählen nun für jedes  $j \in F$  ein solches  $G_j$  so, dass zusätzlich  $E_0 \cap I_j \subseteq G_j$  gilt. Dann ist  $E_0 \subseteq E := \bigcup_{j \in F} G_j$  und daher  $|\sum_{j \in F} a_{G_j} - s| = |\sum_{i \in E} a_i - s| \leq \epsilon/2$ . Somit haben wir insgesamt die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j \in F} s_j - s \right| &= \left| \sum_{j \in F} (s_j - a_{G_j}) + \sum_{j \in F} a_{G_j} - s \right| \\ &\leq \sum_{j \in F} |s_j - a_{G_j}| + \left| \sum_{j \in F} a_{G_j} - s \right| \end{aligned}$$

<sup>1</sup>D.h. die  $I_j$  bilden eine disjunkte Vereinigung von  $I$ .

$$\begin{aligned}
&\leq n \cdot \epsilon/2n + \left| \sum_{i \in E} a_i - s \right| \\
&\leq n \cdot \epsilon/2n + \epsilon/2 \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

□

## Cauchy-Produkt von Reihen

DEFINITION 25.2. Zu zwei Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

komplexer Zahlen heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{ mit } c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$$

das *Cauchy-Produkt* der beiden Reihen.

LEMMA 25.3. *Es seien*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

*zwei absolut konvergente Reihen komplexer Zahlen. Dann ist auch das Cauchy-Produkt  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  absolut konvergent und für die Summe gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right).$$

*Beweis.* Wir müssen für die Partialsummen

$$x_n = \sum_{i=0}^n a_i, \quad y_n = \sum_{j=0}^n b_j \text{ und } z_n = \sum_{k=0}^n c_k$$

zeigen, dass  $z_n$  gegen den Limes der Folge  $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert. Es ist

$$\begin{aligned}
|z_n - x_n y_n| &= \left| \sum_{k=0}^n c_k - \left( \sum_{i=0}^n a_i \right) \left( \sum_{j=0}^n b_j \right) \right| \\
&= \left| \sum_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n, i+j > n} a_i b_j \right| \\
&\leq \sum_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n, i+j > n} |a_i| |b_j| \\
&\leq \left( \sum_{n/2 < i \leq n} |a_i| \right) \left( \sum_{j=0}^n |b_j| \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \sum_{n/2 < j \leq n} |b_j| \right) \left( \sum_{i=0}^n |a_i| \right) \\
& \leq \left( \sum_{n/2 < i \leq n} |a_i| \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \right) \\
& \quad + \left( \sum_{n/2 < j \leq n} |b_j| \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \right).
\end{aligned}$$

Da die beiden Reihen absolut konvergieren, und  $\sum_{n/2 < i \leq n} |a_i|$  und  $\sum_{n/2 < j \leq n} |b_j|$  Nullfolgen sind (siehe Aufgabe 25.17), ist die rechte Seite insgesamt eine Nullfolge. Daher konvergiert die Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen das Produkt der Grenzwerte. Die absolute Konvergenz folgt aus dem bisher Bewiesenen und aus der Abschätzung  $|c_k| \leq \sum_{i=0}^k |a_i| |b_{k-i}|$ .  $\square$

## Potenzreihen

DEFINITION 25.4. Es sei  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von komplexen Zahlen und  $z$  eine weitere komplexe Zahl. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

die *Potenzreihe* in  $z$  zu den Koeffizienten  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Durch Wahl geeigneter Koeffizienten kann man jede Reihe als Potenzreihe zu einer fixierten Basis  $z \in \mathbb{C}$  ansehen. Bei Potenzreihen ist es aber wichtig, dass man  $z$  variieren lässt und dann die Potenzreihe im Konvergenzbereich eine Funktion in  $z$  darstellt.

Eine wichtige Potenzreihe haben wir schon das letzte Mal kennengelernt, nämlich die geometrische Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ , die für  $|z| < 1$  konvergiert und dort die Funktion  $1/(1-z)$  darstellt. Eine weitere besonders wichtige Potenzreihe ist die Exponentialreihe, die für jede komplexe Zahl konvergiert und zur komplexen Exponentialfunktion führt.

## Die Exponentialreihe und die komplexe Exponentialfunktion

DEFINITION 25.5. Für jedes  $z \in \mathbb{C}$  heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

die *Exponentialreihe* in  $z$ .

Dies ist also die Reihe

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + \dots$$

SATZ 25.6. Für jedes  $z \in \mathbb{C}$  ist die Exponentialreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

absolut konvergent.

*Beweis.* Für  $z = 0$  ist die Aussage richtig. Andernfalls betrachten wir den Quotienten

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \left| \frac{z}{n+1} \right| = \frac{|z|}{n+1}.$$

Dies ist für  $n \geq 2$   $|z|$  kleiner als  $1/2$ . Aus dem Quotientenkriterium folgt daher die Konvergenz.  $\square$

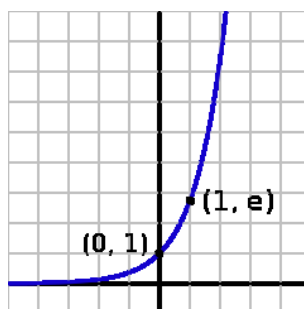
Aufgrund dieser Eigenschaft können wir die komplexe Exponentialfunktion definieren.

DEFINITION 25.7. Die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

heißt *Exponentialfunktion*.

Wir werden später sehen, dass diese Funktion für reelle Argumente die Exponentialfunktion zur Basis  $\exp 1$  ist, und dass  $\exp 1$  mit der früher eingeführten eulerschen Zahl  $e$  übereinstimmt.



Der Graph der reellen Exponentialfunktion

SATZ 25.8. Für komplexe Zahlen  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt

$$\exp(z + w) = \exp z \cdot \exp w.$$

*Beweis.* Das Cauchy-Produkt der beiden Exponentialreihen ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

mit  $c_n = \sum_{i=0}^n \frac{z^i w^{n-i}}{i! (n-i)!}$ . Diese Reihe ist nach Lemma 25.3 absolut konvergent und der Grenzwert ist das Produkt der beiden Grenzwerte. Andererseits ist der  $n$ -te Summand der Exponentialreihe von  $z + w$  gleich

$$\frac{(z + w)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} z^i w^{n-i} = c_n,$$

so dass die beiden Seiten übereinstimmen.  $\square$

**KOROLLAR 25.9.** *Die Exponentialfunktion*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto \exp z,$$

*besitzt folgende Eigenschaften.*

- (1) *Es ist  $\exp 0 = 1$ .*
- (2) *Für jedes  $z \in \mathbb{C}$  ist  $\exp(-z) = (\exp z)^{-1}$ . Insbesondere ist  $\exp z \neq 0$ .*
- (3) *Für ganze Zahlen  $n \in \mathbb{Z}$  ist  $\exp n = (\exp 1)^n$ .*
- (4) *Für reelles  $z$  ist  $\exp z \in \mathbb{R}_+$ .*
- (5) *Für reelle Zahlen  $z > 0$  ist  $\exp z > 1$  und für  $z < 0$  ist  $\exp z < 1$ .*
- (6) *Die reelle Exponentialfunktion <sup>2</sup> ist streng wachsend.*

*Beweis.* (1) folgt direkt aus der Definition. (2) folgt aus

$$\exp z \cdot \exp(-z) = \exp(z - z) = \exp 0 = 1$$

aufgrund von Satz 25.8. (3) folgt aus Satz 25.8 und (2). (4). Der Wert der Exponentialreihe für eine reelle Zahl ist wieder reell, da die reellen Zahlen in  $\mathbb{C}$  abgeschlossen sind. Die Nichtnegativität ergibt sich aus

$$\exp z = \exp\left(\frac{z}{2} + \frac{z}{2}\right) = \exp \frac{z}{2} \cdot \exp \frac{z}{2} = \left(\exp \frac{z}{2}\right)^2 \geq 0.$$

(5). Für reelles  $x$  ist  $\exp x \cdot \exp(-x) = 1$ , so dass nach (4) ein Faktor  $\geq 1$  sein muss und der andere Faktor  $\leq 1$ . Für  $x > 0$  ist

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n > \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-x)^n = \exp(-x),$$

da ja für gerades  $n$  die Summationsglieder übereinstimmen und für ungerades  $n$  die linke Seite größer als die rechte ist. Also ist  $\exp x > 1$ . (6). Für reelle  $w > z$  ist  $w - z > 0$  und daher nach (5)  $\exp(w - z) > 1$ , also

$$\exp w = \exp(w - z + z) = \exp(w - z) \exp z > \exp z.$$

<sup>2</sup>Unter der reellen Exponentialfunktion verstehen wir hier die Einschränkung der komplexen Exponentialfunktion auf die reellen Zahlen. Wir werden bald sehen, dass sie mit der Exponentialfunktion zur Basis  $e$  übereinstimmt.



## Die trigonometrischen Reihen

DEFINITION 25.10. Für  $z \in \mathbb{C}$  heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

die *Kosinusreihe* und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

die *Sinusreihe* zu  $z$ .

Durch Vergleich mit der Exponentialreihe ergibt sich sofort, dass diese beiden Reihen für jedes  $z$  absolut konvergieren. Die zugehörigen Funktionen

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{und} \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

heißen *Sinus* und *Kosinus*. Beide Funktionen stehen unmittelbar in Zusammenhang mit der Exponentialfunktion, wobei man allerdings die komplexen Zahlen braucht, um diesen Zusammenhang zu erkennen.

SATZ 25.11. *Die Funktionen*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \cos z,$$

und

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \sin z,$$

besitzen für  $z, w \in \mathbb{C}$  folgende Eigenschaften.

(1) Für  $z = x + iy$  ist

$$\exp z = (\exp x)(\cos y + i \sin y).$$

(2) Es ist  $\cos 0 = 1$  und  $\sin 0 = 0$ .

(3) Es ist  $\cos(-z) = \cos z$  und  $\sin(-z) = -\sin z$ .

(4) Es ist

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$$

und

$$\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.$$

(5) Es gelten die Additionstheoreme

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w.$$

und

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w.$$

(6) Es gilt

$$(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1.$$

*Beweis.* (1). Aufgrund von Satz 25.8 gilt

$$\exp(x + iy) = \exp x \cdot \exp(iy),$$

so dass wir nur noch den hinteren Faktor betrachten müssen. Da man absolut konvergente Reihen beliebig sortieren darf, gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i(-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos y + i \sin y. \end{aligned}$$

(2) und (3) folgen direkt aus der Definition der Reihen. (4) folgt aus (1) und (3). (5). Es ist

$$\begin{aligned} \cos(z + w) &= \frac{\exp(i(z + w)) + \exp(-i(z + w))}{2} \\ &= \frac{\exp(iz) \exp(iw) + \exp(-iz) \exp(-iw)}{2} \\ &= \frac{1}{2} ((\cos z + i \sin z)(\cos w + i \sin w) \\ &\quad + (\cos z - i \sin z)(\cos w - i \sin w)) \\ &= \frac{1}{2} (\cos z \cos w \\ &\quad + i(\cos z \sin w + \sin z \cos w) - \sin z \sin w \\ &\quad + \cos z \cos w \\ &\quad - i(\cos z \sin w + \sin z \cos w) \\ &\quad - \sin z \sin w) \\ &= \cos z \cos w - \sin z \sin w. \end{aligned}$$

Das Additionstheorem für den Sinus folgt ähnlich. (6). Aus dem Additionstheorem für den Cosinus angewendet auf  $w = -z$  und aufgrund von (2) ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 &= \cos 0 \\ &= \cos(z - z) \\ &= \cos z \cos(-z) - \sin z \sin(-z) \\ &= \cos z \cos z + \sin z \sin z. \end{aligned}$$

□

Für reelle  $z$  sind  $\sin z$  und  $\cos z$  wieder reell, wie unmittelbar aus der Potenzreihendarstellung folgt. Die letzte Aussage im vorstehenden Satz besagt, dass für reelles  $z$  das Paar  $(\cos z, \sin z)$  ein Punkt auf dem *Einheitskreis*  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$  ist. Wir werden später sehen, dass sich jeder Punkt des Einheitskreises als  $(\cos z, \sin z)$  schreiben lässt, wobei man  $z$  als Winkel



interpretieren kann. Dabei tritt die Periode  $2\pi$  auf, wobei wir die *Kreiszahl*  $\pi$  eben über die trigonometrischen Funktionen einführen werden



## Abbildungsverzeichnis

Quelle = Exp.svg, Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons,  
Lizenz = CC-by-sa 3.0

4

