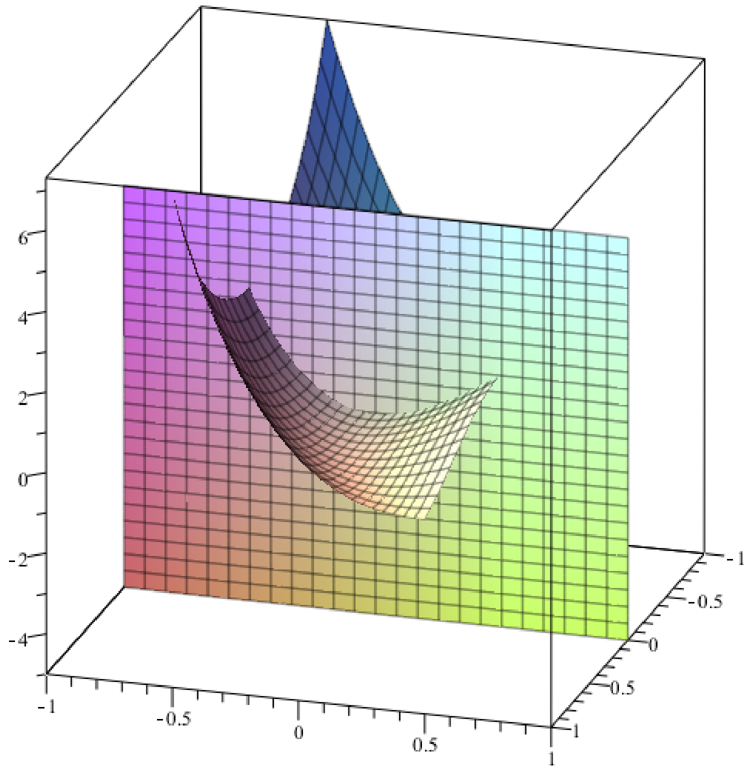
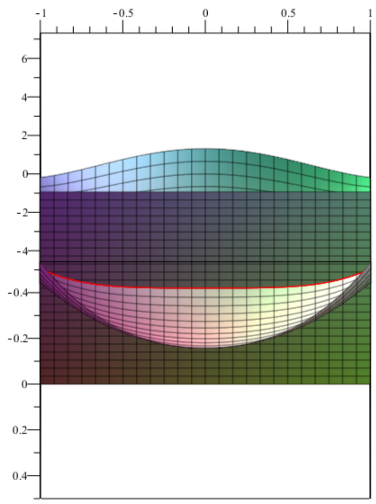
$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R};\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto(x^2+(y-1)^2-1)(x^2+(y-2)^2-4)$$

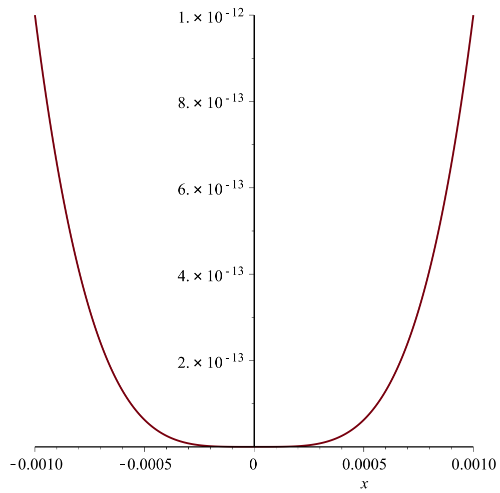
Der Graph von f geschnitten von der yz-Ebene:



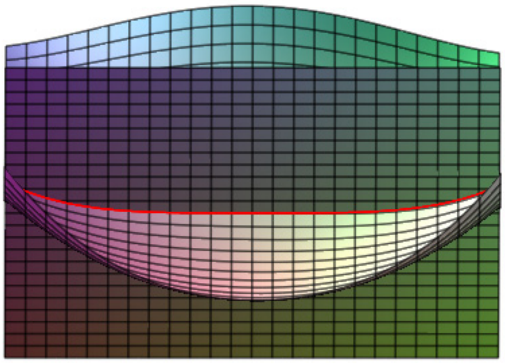
Dass diese Schnittkurve im Nullpunkt ein Minimum besitzt, ist in der Grafik gut erkennbar. Betrachtet man den Schnitt der um $\frac{\pi}{2}$ bzgl. der z-Achse gedrehten Funktion mit der gleichen Ebene ist nicht gleich ersichtlich, dass der Schnitt ein Minimum im Nullpunkt besitzt. Die Schnittkurve wird durch die Funktion s_1 beschrieben, die bekanntermaßen im Nullpunkt ein Minimum besitzt:

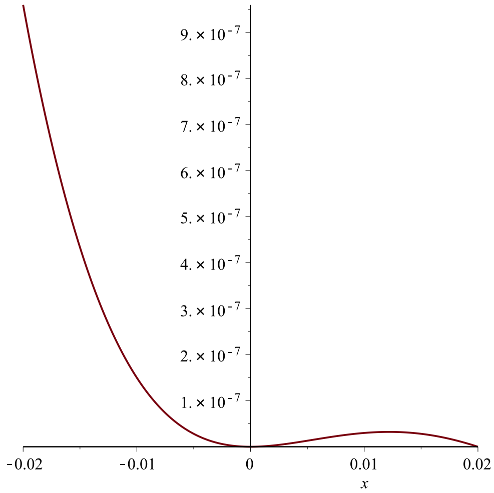
$$s_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3;t\mapsto\begin{pmatrix}0\\t\\t^4\end{pmatrix}$$





Was passiert, wenn die Schnittebene um einen (kleinen) Winkel ε (im Beispiel 0.01rad) gedreht wird?
Hier ist ebenfalls nicht klar erkennber, ob der Schnitt im Nullpunkt ein Minimum besitzt. Betrachtet man allerdings die Schnittkurve s_2, wird erkennbar, dass auch dieser Schnitt im Nullpunkt ein Minimum aufweist:





$$s_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3; t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ (t^2 + (0{,}0100003335t - 1)^2 - 1)(t^2 + (0{,}0100003335t - 2)^2 - 4) \end{pmatrix}$$

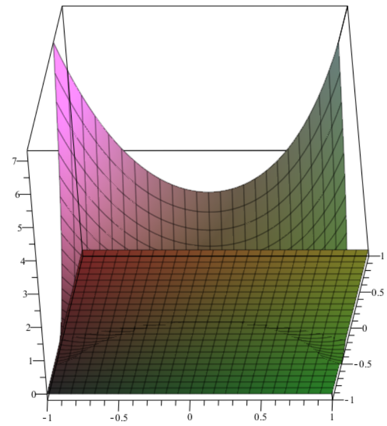
Der Schnitt der um einen Winkel ε gedrehten Funktion mit der yz-Ebene wird durch s beschrieben:

$$s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3; t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ (t^2 + (t\tan\varepsilon - 1)^2 - 1)(t^2 + (t\tan\varepsilon - 2)^2 - 4) \end{pmatrix}$$

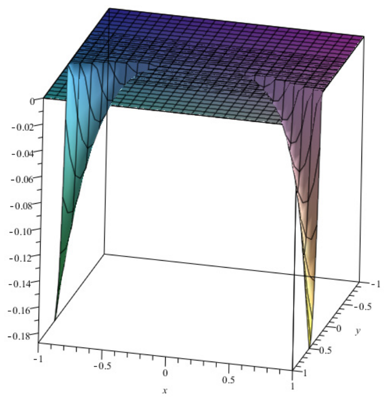
Da erst die quadratische Taylor-Näherung um t=0 nicht verschwindet, bestimmt diese das lokale Verhalten der Schnittkurve um den Nullpunkt. Da diese positiv in einer Umgebung um den Nullpunkt ist, besitzt jede Schnittkurve im Koordinatenursprung ein Minimum:

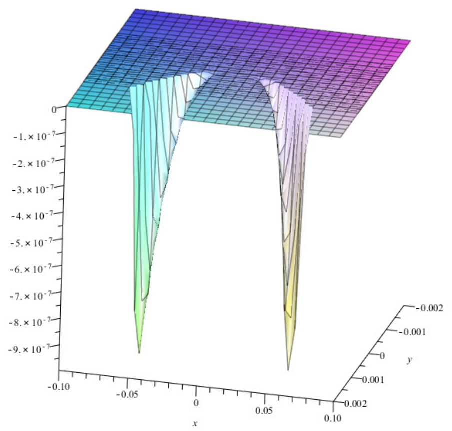
$$s \approx \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 8(t\tan\varepsilon)^2 \end{pmatrix}$$

Obwohl jede Schnittkurve im Nullpunkt ein Minimum zeigt, weist die Funktion insgesamt kein Extremum (der Funktionsgraph überschreitet in jeder Umgebung um den Nullpunkt die eingezeichnete xy Ebene):

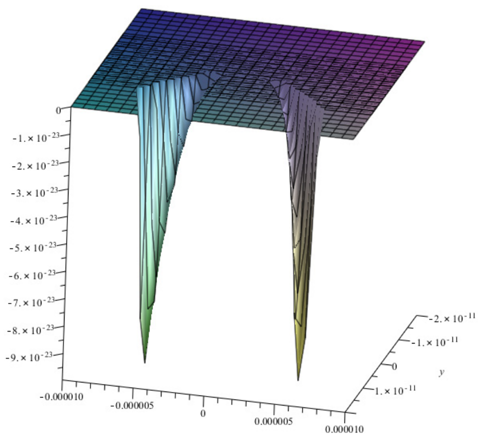


Der Bereich, der durch die Ebene ragt:





1.000% Vergrößerung



1.000.000% Vergrößerung