Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Vorkurs Mathematik

Vorlesung 8

Angeordnete Körper

Definition 8.1. Ein Körper K heißt *angeordnet*, wenn es eine totale Ordnung „$\geq$“ auf K gibt, die die beiden Eigenschaften

(1) Aus $a \geq b$ folgt $a + c \geq b + c$ für beliebige $a, b, c \in K$
(2) Aus $a \geq 0$ und $b \geq 0$ folgt $ab \geq 0$ für beliebige $a, b \in K$

erfüllt.

In einem angeordneten Körper nennt man ein Element $a \in K$ *positiv*, wenn $a > 0$ ist, und *negativ*, wenn $a < 0$ ist. Die 0 ist demnach weder positiv noch negativ, und jede Zahl ist entweder positiv oder negativ oder null. Die Elemente a mit $a \geq 0$ nennt man dann einfach *nichtnegativ* und die Elemente a mit $a \leq 0$ *nichtpositiv*. Für die entsprechenden Mengen schreibt man

$$K_+,\ K_-,\ K_{\geq 0} = K_+^0,\ K_{\leq 0} = K_-^0$$

oder Ähnliches. Die wichtigsten Beispiele für angeordnete Körper sind der Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und der Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Lemma 8.2. *In einem angeordneten Körper gelten die folgenden Eigenschaften.*

(1) $1 > 0$,
(2) *Aus $a \geq b$ und $c \geq 0$ folgt $ac \geq bc$,*
(3) *Aus $a \geq b$ und $c \leq 0$ folgt $ac \leq bc$.*

Beweis. Siehe Aufgabe. 8.1 □

Definition 8.3. Sei K ein angeordneter Körper. Zu $a, b \in K$, $a \leq b$, nennt man

• $[a, b] = \{x \in K : x \geq a \text{ und } x \leq b\}$ das *abgeschlossene Intervall*.

• $]a, b[= \{x \in K : x > a \text{ und } x < b\}$ das *offene Intervall*.

• $]a, b] = \{x \in K : x > a \text{ und } x \leq b\}$ das *linksseitig offene Intervall*.

• $[a, b[= \{x \in K : x \geq a \text{ und } x < b\}$ das *rechtsseitig offene Intervall*.

Für das offene Intervall wird häufig auch (a, b) geschrieben. Die Zahlen a und b heißen die *Grenzen des Intervalls*, genauer spricht man von oberer und unterer Grenze. Die Bezeichnung linksseitig und rechtsseitig bei den beiden letzten Intervallen (die man auch als *halboffen* bezeichnet) rühren von der üblichen Repräsentierung der reellen Zahlen als Zahlengerade her, bei der rechts die positiven Zahlen stehen. Zutreffender (also weniger konventionsverhaftet) wäre es von „größerseitig offen" und „kleinerseitig offen" zu sprechen.

Bemerkung 8.4. Ein äquivalenter Zugang zum Begriff des angeordneten Körpers funktioniert so: Man hat einen Körper K, bei dem eine Teilmenge $P \subseteq K$ (die „positive Hälfte") ausgezeichnet ist mit den folgenden Eigenschaften

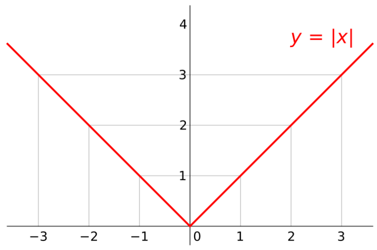
(1) Entweder $x \in P$ oder $-x \in P$ oder $x = 0$.
(2) Aus $x, y \in P$ folgt $x + y \in P$.
(3) Aus $x, y \in P$ folgt $x \cdot y \in P$.

In einem angeordneten Körper erfüllen die positiven Elemente diese Bedingungen. Man kann aber umgekehrt aus einem Körper mit einer solchen positiven Teilmenge einen angeordneten Körper machen, indem man

$$x \geq y \text{ durch } x = y \text{ oder } x - y \in P$$

definiert, siehe Aufgabe 8.9.

Der Betrag



Definition 8.5. In einem angeordneten Körper K ist der *Betrag* eines Elementes $x \in K$ folgendermaßen definiert.

$$|x| = \begin{cases} x \text{ falls } x \geq 0 \\ -x \text{ falls } x < 0 \end{cases} .$$

Der Betrag ist also nie negativ und hat nur bei $x = 0$ den Wert 0, sonst ist er immer positiv. Die Gesamtabbildung

$$K \longrightarrow K,\ x \longmapsto |x|,$$

nennt man auch *Betragsfunktion*. Der Funktionsgraph setzt sich aus zwei Halbgeraden zusammen; eine solche Funktion nennt man auch *stückweise linear*.

BEMERKUNG 8.6. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird manchmal nicht durch einen einzigen „geschlossenen Ausdruck“ definiert, sondern durch mehrere verschiedene Ausdrücke, die abhängig vom Argument zum Zuge kommen. Typischerweise wird dabei der Definitionsbereich $\mathbb{R}$ (oder eine Teilmenge davon) in disjunkte Bereiche M_i, $i \in I$, unterteilt, auf denen dann die Funktion f jeweils durch einen bestimmten funktionalen Ausdruck φ_i definiert wird. Es ist also

$$f(x) = \varphi_i(x), \text{ falls } x \in M_i \,.$$

Da die M_i eine disjunkte Vereinigung des Definitionsbereiches bilden, ist eine solche Funktion wohldefiniert. Zu jedem x gibt es genau ein i mit $x \in M_i$, so dass das φ_i und damit auch $\varphi_i(x)$ eindeutig bestimmt ist. Man spricht von einer *Definition durch Fallunterscheidung*, wobei die Fälle eben durch die Bedingung $x \in M_i$ bestimmt sind. I ist also die Indexmenge der Fallunterscheidung.

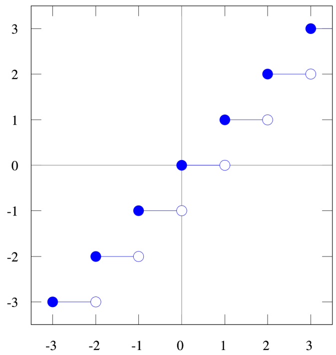
Häufige Spezialfälle davon sind, dass $\mathbb{R}$ in verschiedene Intervalle zerlegt ist, auf denen unterschiedliche Funktionsvorschriften gelten sollen. Wenn es eine endliche Folge von aufsteigenden Zahlen $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$ gibt, so dass auf den dadurch begrenzten Intervallen unterschiedliche Definitionen gelten sollen, so wird das häufig in der Form

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_0(x) \text{ für } x < a_1 \\ \varphi_1(x) \text{ für } a_1 \leq x < a_2 \\ \varphi_2(x) \text{ für } a_2 \leq x < a_3 \\ \ldots \\ \varphi_{n-1}(x) \text{ für } a_{n-1} \leq x < a_n \\ \varphi_n(x) \text{ für } a_n \leq x \end{cases}$$

geschrieben. Dabei können auch andere Abschätzungszeichen vorkommen. Wichtig aber ist, dass die durch die Ungleichungen beschriebene Einteilung eine disjunkte Zerlegung liefert. Manchmal werden unkorrekterweise die Einteilungsbedingungen so gewählt, dass eine Intervallgrenze sowohl zum kleineren als auch zum größeren Intervall dazugenommen wird, was dann akzeptabel ist, wenn die beiden konkurrierenden Funktionswerte übereinstimmen.

Wenn man mit einer durch eine Fallunterscheidung gegebenen Funktion arbeitet, wenn man beispielsweise etwas darüber beweisen möchte, muss man die Fallunterscheidung stets „mitschleppen“, d.h. man muss stets mit der gültigen Funktionsdefinition arbeiten. Wenn nicht klar ist, in welchem Intervall sich ein Argument x befindet, über das man eine Aussage machen möchte, so muss man eben die möglichen Fälle getrennt abarbeiten.

Die sogenannte Gaußklammer ist eine Funktion, die durch eine Fallunterscheidung entlang der ganzzahligen Intervalle definiert wird.



Definition 8.7. Die *Gaußklammer* ist die Funktion

$$[\,] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto [x],$$

die durch

$$[x] = n, \text{ wobei } n \in \mathbb{Z} \text{ so gewählt wird, dass } x \in [n, n+1[\text{ ist },$$

definiert wird.

Lemma 8.8. *Es sei K ein angeordneter Körper. Dann erfüllt die Betragsfunktion*

$$K \longrightarrow K_{\geq 0},\ x \longmapsto |\,x\,|,$$

folgende Eigenschaften (dabei seien x, y beliebige Elemente in K).

(1) $|\,x\,| \geq 0$.
(2) $|\,x\,| = 0$ *genau dann, wenn* $x = 0$ *ist.*
(3) $|\,x\,| = |\,y\,|$ *genau dann, wenn* $x = y$ *oder* $x = -y$ *ist.*
(4) $|\,y - x\,| = |\,x - y\,|$.
(5) $|\,xy\,| = |\,x\,||\,y\,|$.
(6) *Für* $x \neq 0$ *ist* $|\,x^{-1}\,| = |\,x\,|^{-1}$.
(7) *Es ist* $|\,x + y\,| \leq |\,x\,| + |\,y\,|$ *(*Dreiecksungleichung für den Betrag*).*

Beweis. Siehe Aufgabe. 8.12 ☐

Bernoulli'sche Ungleichung

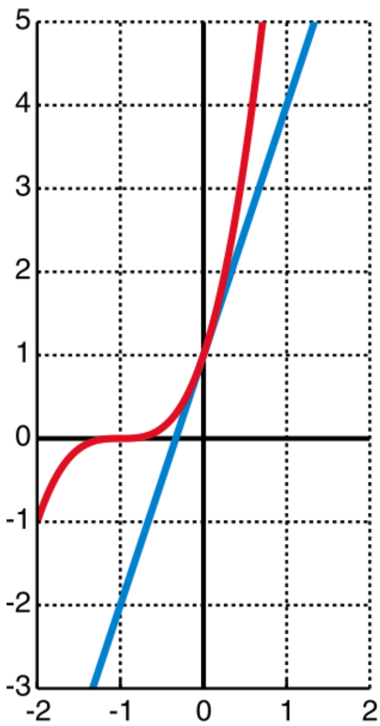
Satz 8.9. *(Bernoulli Ungleichung) Sei K ein angeordneter Körper und n eine natürliche Zahl. Dann gilt für jedes $x \in K$ mit $x \geq -1$ die Abschätzung*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx\,.$$

Beweis. Wir führen Induktion über n. Bei $n = 0$ steht beidseitig 1, so dass die Aussage gilt. Sei nun die Aussage für n bereits bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x)\\ &\geq (1+nx)(1+x)\\ &= 1+(n+1)x+nx^2\\ &\geq 1+(n+1)x.\end{aligned}$$

□



Archimedisch angeordnete Körper

Wenn man sich wie üblich die reellen Zahlen als Zahlengerade vorstellt, so ist das nächste Axiom selbstverständlich. Es gibt aber auch sehr interessante angeordnete Körper, in denen dieses Axiom nicht gilt; es gilt auch nicht im Rahmen der sogenannten non-standard Analysis.

DEFINITION 8.10. Es sei K ein angeordneter Körper. Dann heißt K *archimedisch angeordnet*, wenn das folgende *Archimedische Axiom* gilt, d.h. wenn es zu jedem $x > 0$ eine natürliche Zahl n gibt mit

$$n \geq x\,.$$

Archimedes (ca. 287 -212 v. C.)

LEMMA 8.11. *Sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Dann gibt es zu $x, y > 0$ stets ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$.*

Beweis. Es ist $y/x > 0$. Aufgrund des Archimedes-Axioms gibt es ein n mit $n \geq y/x$. Dann ist auch $nx \geq y$. $\square$

LEMMA 8.12. *Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper Es sei $x > 0$. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} \leq x$.*

Beweis. Es ist x^{-1} eine wohldefinierte positive Zahl und daher gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq x^{-1}$. Dies ist äquivalent zu

$$\frac{1}{n} = n^{-1} \leq (x^{-1})^{-1} = x.$$

$\square$

LEMMA 8.13. *Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper Dann gibt es zwischen je zwei Elementen $x < y$ auch eine rationale Zahl n/k (mit $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}_+$) mit*

$$x < \frac{n}{k} < y$$

Beweis. Wegen $y > x$ ist $y - x > 0$ und daher gibt es nach Fakt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k} < y - x$. Wegen der Archimedes-Eigenschaft gibt es auch ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n\frac{1}{k} > x$ und ein $n' \in \mathbb{Z}_-$ mit $n'\frac{1}{k} \leq x$. Daher gibt es auch ein $n \in \mathbb{Z}$ derart, dass

$$n\frac{1}{k} > x \text{ und } (n-1)\frac{1}{k} \leq x$$

ist. Damit ist einerseits $x < \frac{n}{k}$ und andererseits

$$\frac{n}{k} = \frac{n-1}{k} + \frac{1}{k} < x + y - x = y$$

wie gewünscht. $\square$

LEMMA 8.14. *Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und $x > 1$. Dann gibt es zu jedem $B \in K$ eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$x^n \geq B\,.$$

Beweis. Wir schreiben $x = 1 + u$ mit $u > 0$. Aufgrund des Archimedes-Axioms gibt es eine natürliche Zahl n mit $nu \geq B - 1$. Damit gilt unter Verwendung von Satz 8.9 die Abschätzung

$$x^n = (1 + u)^n \geq 1 + nu \geq 1 + B - 1 = B.$$

□

Abbildungsverzeichnis