Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 37

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 37.1. Bestimme die[1] Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ mit } v(2) = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 37.2. Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = \left(t^2 - \sin t\, , \cos^2 t\right) \text{ mit } v(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 37.3. Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems zum Vektorfeld

$$F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (t,x,y) \longmapsto (-ay, ax),$$

und zur Anfangsbedingung $v(s) = (b,c)$ (dabei seien $a,b,c,s \in \mathbb{R}$ fixierte reelle Zahlen).

Aufgabe 37.4. Es sei ein entkoppeltes Differentialgleichungssystem zum Vektorfeld

$$F(t,x_1,\ldots,x_n) = (f_1(t,x_1),\ldots,f_n(t,x_n))$$

gegeben. Erläutere, wie sich die Lösungen der einzelnen Differentialgleichungen $x_i' = f_i(t,x_i)$ zur Gesamtlösung verhalten, wie dabei die Definitionsintervalle der Lösungen zusammenhängen und was man über die Eindeutigkeit von Lösungen aussagen kann.

Aufgabe 37.5. Finde alle Lösungen des Differentialgleichungssystems zum Vektorfeld

$$F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (t,x,y) \longmapsto \left(t^2x, yt + \sin t\right).$$

[1] Mit dieser Formulierung wird hier und im Folgenden implizit benutzt, dass die Lösung eindeutig ist. In den meisten der hier gestellten Aufgaben ergibt sich die Eindeutigkeit direkt, sie ist aber nicht Teil der Aufgabenstellung.

Aufgabe 37.6. Finde die Lösung φ des Anfangswertproblems für das Zentralfeld

$$F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t,v,w) \longmapsto \left(t^2 - t\right)(v,w) = \left(\left(t^2 - t\right)v, \left(t^2 - t\right)w\right),$$

mit $\varphi(0) = (1,1)$.

Aufgabe 37.7. Sei

$$F\colon I \times U \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto F(t,v),$$

ein Vektorfeld. Zeige, dass eine konstante Abbildung

$$\varphi\colon I \longrightarrow U,\ t \longmapsto \varphi(t) = c,$$

genau dann eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung $v' = F(t,v)$ ist, wenn $F(t,c) = 0$ ist für alle $t \in I$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 37.8. (4 Punkte)

Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = \left(-\sin^3 t\ \cos t\,, \frac{t^3 - t + 1}{t^2 - 4}\right) \text{ mit } v(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 37.9. (4 Punkte)

Finde die Lösung des Anfangswertproblems zum Vektorfeld

$$F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t,x,y) \longmapsto \left(xt + 3e^{-t}, \frac{t^2}{\sin y}\right)$$

und zur Anfangsbedingung $v(0) = (2,0)$.

Aufgabe 37.10. (4 Punkte)

Finde die Lösung φ des Anfangswertproblems für das Zentralfeld

$$F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t,v,w) \longmapsto (t^3 - t)(v,w) = ((t^3 - t)v, (t^3 - t)w),$$

mit $\varphi(0) = (2,3)$.

Aufgabe 37.11. (4 Punkte)

Finde die Lösung φ des Anfangswertproblems für das Zentralfeld

$$F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t,v,w) \longmapsto (t^2 v)(v,w) = (t^2 v^2, t^2 vw),$$

mit $\varphi(0) = (5,-1)$.

Aufgabe 37.12. (6 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $U \subseteq V$ offen und

$$F\colon U \longrightarrow V$$

ein zeitunabhängiges Vektorfeld. Es sei

$$v\colon J \longrightarrow U$$

eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung $v' = F(v)$. Es gebe zwei Zeitpunkte $t_0 \neq t_1$ in J mit $v(t_0) = v(t_1)$. Zeige, dass es dann eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung dieser Differentialgleichung gibt.