Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2011**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 20

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 20.1. Untersuche für jede Filtrierung von S_3 mit Untergruppen, ob eine auflösende Filtrierung vorliegt oder nicht.

Aufgabe 20.2. Sei G eine Gruppe. Zeige, dass G genau dann kommutativ ist, wenn die Kommutatoruntergruppe $K(G)$ trivial ist.

Aufgabe 20.3. Seien G und H Gruppen und sei

$$\varphi : G \longrightarrow H$$

ein Gruppenhomomorphismus. Zeige die Beziehung $\varphi(K(G)) \subseteq K(H)$.

Die folgende Aussage heißt Satz von Cayley.

Jede Gruppe lässt sich als Untergruppe einer Permutationsgruppe realisieren. Jede endliche Gruppe lässt sich als Untergruppe einer endlichen Permutationsgruppe realisieren.

Aufgabe 20.4. Beweise den Satz von Cayley für Gruppen.

Eine Gruppe heißt *einfach*, wenn sie genau zwei Normalteiler enthält (nämlich sich selbst und die triviale Gruppe).

Aufgabe 20.5. Sei G eine einfache, nicht kommutative Gruppe. Zeige, dass G nicht auflösbar ist.

Aufgabe 20.6. Sei G eine einfache, nicht kommutative Gruppe. Zeige, dass G eine Untergruppe besitzt, die kein Normalteiler ist.

Zu $n \in \mathbb{N}$ heißt die Untergruppe

$$A_n = \{\sigma \in S_n | \operatorname{sgn}(\sigma) = 1\} \subseteq S_n$$

der geraden Permutationen die *alternierende Gruppe*.

Wir erwähnen, dass die alternierenden Gruppen A_n, $n \geq 5$, einfach sind (das ist eine nichttriviale Aussage). Dies bedeutet, dass die Permutationsgruppen S_n, $n \geq 5$, nur die alternierende Gruppe als Normalteiler enthalten.

Aufgabe 20.7. Sei A_n eine alternierende Gruppe mit $n \geq 4$. Zeige, dass A_n nicht kommutativ ist.

Eine Gruppe G heißt *perfekt*, wenn sie gleich ihrer eigenen Kommutatoruntergruppe ist, also wenn $G = K(G)$ gilt.

Aufgabe 20.8. Sei G eine einfache, nicht kommutative Gruppe. Zeige, dass G perfekt ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 20.9. (4 Punkte)

Zeige, dass für $n \leq 4$ die Permutationsgruppen S_n auflösbar sind.

Aufgabe 20.10. (3 Punkte)

Sei G eine zyklische Gruppe. Zeige, dass G genau dann einfach ist, wenn G endlich und ihre Ordnung eine Primzahl ist.

Aufgabe 20.11. (2 Punkte)

Zeige, dass jede gerade Permutation $\sigma \in S_n$, $n \geq 3$, ein Produkt aus Dreierzykeln ist.

Aufgabe 20.12. (4 Punkte)

Zeige: Keine der alternierenden Gruppen A_n besitzt eine Untergruppe vom Index zwei.

Hinweis: Aufgabe 20.11 hilft.

Aufgabe 20.13. (3 Punkte)

Sei G eine Gruppe mit Zentrum $Z(G)$. Zeige:

(1) G ist genau dann abelsch, wenn $G/Z(G)$ zyklisch ist.
(2) Der Index von $Z(G)$ in G ist keine Primzahl.
(3) Ist G von der Ordnung pq für zwei Primzahlen p und q, so ist G abelsch oder $Z(G)$ trivial.

Aufgabe 20.14. (4 Punkte)

Sei K ein Körper mit mindestens 4 Elementen. Zeige, dass $\mathrm{SL}_2(K)$ perfekt ist.

Tipp: Es gibt ein $x \in K$ mit $x^2 - 1 \neq 0$.

Aufgabe 20.15. (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Zeige, dass $\mathrm{SL}_2(K)$ von

$$\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in K\} \cup \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \mid c \in K\}$$

erzeugt wird.

Abbildungsverzeichnis