Fachbereich Mathematik/Informatik **27. September 2012**
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik für Anwender II

Klausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt in der Regel bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Ich erkläre mich durch meine Unterschrift einverstanden, dass mein Klausurergebnis mit meiner Matrikelnummer im Internet bekanntgegeben wird.

Unterschrift: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\sum$
mögliche Pkt.:	4	4	3	3	3	5	4	4	8	6	5	4	8	3	64
erhaltene Pkt.:															

Note:

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *stetige Abbildung* zwischen zwei metrischen Räumen M und N.
(2) Eine *polynomiale* Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

(3) Der *Eigenraum* zu $\lambda \in K$ und einer K-linearen Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow V.$$

(4) Ein *Fundamentalsystem* zu einem homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten $v' = Mv$.
(5) Die *Hesse-Matrix* zu einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

in einem Punkt $P \in \mathbb{R}^n$.
(6) Ein *C^k-Diffeomorphismus* zwischen zwei offenen Mengen $U_1 \subseteq V_1$ und $U_2 \subseteq V_2$ in zwei euklidischen Vektorräumen V_1 und V_2.
(7) Die *Jacobi-Determinante* zu einer total differenzierbaren Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

auf einem reellen endlichdimensionalen Vektorraum V in einem Punkt $P \in V$.
(8) Eine *harmonische Funktion*

$$u : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einer offenen Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^n$.

Lösung

(1) Eine Abbildung

$$f : M \longrightarrow N$$

heißt *stetig*, wenn für jedes $x \in M$ und für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$f(U(x, \delta)) \subseteq U(f(x), \epsilon)$$

gilt.
(2) Eine *polynomiale Funktion* ist eine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

der Gestalt

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_n^{\nu_n}$$

mit $a_\nu \in \mathbb{R}$ und wobei nur endlich viele davon von 0 verschieden sind.

(3) Der *Eigenraum* zu $\lambda \in K$ und φ ist durch

$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi) := \{v \in V \,|\, \varphi(v) = \lambda v\}$$

definiert.

(4) Ein *Fundamentalsystem* zu $v' = Mv$ ist eine Basis des Lösungsraumes.

(5) Es seien $D_i := D_{e_i}$, $i = 1, \ldots, n$, die partiellen Ableitungen in Richtung der Standardvektoren. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} D_1 D_1 f(P) & \cdots & D_1 D_n f(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n D_1 f(P) & \cdots & D_n D_n f(P) \end{pmatrix}$$

heißt die *Hesse-Matrix* zu f im Punkt P.

(6) Eine Abbildung

$$\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$$

heißt C^k-*Diffeomorphismus*, wenn φ bijektiv und k-mal stetig differenzierbar ist, und wenn die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} : U_2 \longrightarrow U_1$$

ebenfalls k-mal stetig differenzierbar ist.

(7) Man nennt die Determinante

$$\det (D\varphi)_P$$

des totalen Differentials die *Jacobi-Determinante* in $P \in V$.

(8) Eine zweimal differenzierbare Funktion

$$u : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einer offenen Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *harmonisch*, wenn

$$\triangle u \;=\; \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_n} \;=\; 0$$

ist.

AUFGABE 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze bzw. Formeln.

(1) Die *Abschätzung von Cauchy-Schwarz* (oder *Cauchy-Schwarz Ungleichung*) in einem Vektorraum V mit Skalarprodukt.
(2) Die *Charakterisierung von trigonalisierbaren Abbildungen* mit Hilfe des charakteristischen Polynoms.
(3) Der *Satz von Schwarz.*
(4) Die *Formel für das Volumen eines Rotationskörpers* um die x-Achse zu einer stetigen Funktion
$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Lösung

(1) Die *Cauchy-Schwarzsche Abschätzung* besagt
$$|\langle v, w\rangle| \leq ||v|| \cdot ||w||$$
für alle $v, w \in V$.
(2) Es sei
$$\varphi : V \longrightarrow V$$
eine lineare Abbildung auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum. Dann ist φ genau dann trigonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom von φ in Linearfaktoren zerfällt.
(3) Es seien V und W euklidische Vektorräume. Sei $G \subseteq V$ offen und $\varphi : G \to W$ eine Abbildung, so dass für $u, v \in V$ die zweiten Richtungsableitungen $D_v D_u \varphi$ und $D_u D_v \varphi$ existieren und stetig sind. Dann gilt
$$D_v D_u \varphi = D_u D_v \varphi\,.$$
(4) Das Volumen des durch f bestimmten Rotationskörpers K ist
$$\lambda^3(K) \,=\, \pi \cdot \int_a^b f(t)^2\, dt.$$

AUFGABE 3. (3 Punkte)
Bestimme die Länge der durch

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto (\cos t\,, \sin t\,, t),$$

gegebenen *Schraubenlinie* für t zwischen 0 und b, wobei $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned} L &= \int_0^b \| f'(t) \| \, dt \\ &= \int_0^b \left\| \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \right\| dt \\ &= \int_0^b \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt \\ &= \int_0^b \sqrt{2} dt \\ &= \sqrt{2} b. \end{aligned}$$

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Berechne das Wegintegral $\int_\gamma F$ zum Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (y,x),$$

längs des Weges

$$\gamma : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t, e^t).$$

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F &= \int_{-1}^{1} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \\
&= \int_{-1}^{1} \langle \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \end{pmatrix} \rangle dt \\
&= \int_{-1}^{1} e^t + te^t dt \\
&= \left(te^t \right) |_{-1}^{1} \\
&= e + e^{-1}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte der linearen Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Lösung

Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} P_A(x) &= \det \begin{pmatrix} x+2 & 4 & -2 \\ 0 & x-2 & -3 \\ 0 & -6 & x-1 \end{pmatrix} \\ &= (x+2)\left((x-2)(x-1)-18\right) \\ &= (x+2)\left(x^2-3x-16\right) \\ &= x^3-x^2-22x-32. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte der lineraren Abbildung sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Der erste Eigenwert ist daher $x_1 = -2$. Die weiteren Eigenwerte ergeben sich als die Lösungen von $x^2 - 3x - 16 = 0$. Diese sind $x_2 = \frac{\sqrt{73}}{2} + \frac{3}{2}$ und $x_3 = -\frac{\sqrt{73}}{2} + \frac{3}{2}$.

Aufgabe 6. (5 Punkte)
Löse das Anfangswertproblem

$$y'' = (y')^2 + 2y \text{ mit } y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 1$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

Lösung

Wir machen den Ansatz

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \,,$$

aufgrund der Anfangswertbedingungen ist $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$. Es ist $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$ und $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$. Aus der Gleichung

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} \;=\; \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} \right)^2 + 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right)$$

lassen sich die Koeffizienten a_i bestimmen.
Koeffizientenvergleich zu t^0 ergibt

$$2a_2 \;=\; a_1^2 + 2a_0 \;=\; 1,$$

also ist $a_2 = \frac{1}{2}$.
Koeffizientenvergleich zu t^1 ergibt

$$6a_3 \;=\; 4a_1 a_2 + 2a_1 \;=\; 4,$$

also ist $a_3 = \frac{2}{3}$.
Koeffizientenvergleich zu t^2 ergibt

$$12a_4 \;=\; 4a_2^2 + 6a_1 a_3 + 2a_2 \;=\; 1 + 4 + 1 \;=\; 6,$$

also ist $a_4 = \frac{1}{2}$.
Daher ist

$$t + \frac{1}{2} t^2 + \frac{2}{3} t^3 + \frac{1}{2} t^4$$

die Lösung des Anfangswertproblems bis zur Ordnung 4.

AUFGABE 7. (4 Punkte)

Es sei
$$v' = Mv$$
mit
$$M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$$
eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und es sei $u \in \mathbb{K}^n$ ein Eigenvektor zu M zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeige, dass die Abbildung
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n,\ t \longmapsto ce^{\lambda t}u = c\begin{pmatrix} e^{\lambda t}u_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda t}u_n \end{pmatrix},$$
($c \in \mathbb{K}$) eine Lösung dieses Differentialgleichungssystems ist.

Lösung

Dies folgt direkt wegen
$$\begin{aligned} v'(t) &= \begin{pmatrix} ce^{\lambda t}u_1 \\ \vdots \\ ce^{\lambda t}u_n \end{pmatrix}' \\ &= \begin{pmatrix} (ce^{\lambda t}u_1)' \\ \vdots \\ (ce^{\lambda t}u_n)' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda ce^{\lambda t}u_1 \\ \vdots \\ \lambda ce^{\lambda t}u_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda ce^{\lambda t}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \\ &= M\left(ce^{\lambda t}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$= \quad M \begin{pmatrix} ce^{\lambda t} u_1 \\ \vdots \\ ce^{\lambda t} u_n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8. (4 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto f(x,y)=e^{x-y^2},$$

im Punkt $(1,1)$.

Lösung

Die relevanten Ableitungen sind

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= e^{x-y^2},\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -2ye^{x-y^2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} &= e^{x-y^2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} &= \left(-2+4y^2\right) e^{x-y^2},\\
\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} &= -2ye^{x-y^2}.
\end{aligned}$$

Somit sind die Werte der relevanten Ableitungen im Punkt $(1,1)$ gleich

$$\begin{aligned}
f(1,1) &= 1,\\
\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) &= 1,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) &= -2,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(1,1) &= 1,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(1,1) &= 2,\\
\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) &= -2.
\end{aligned}$$

Daher ist das Taylor-Polynom der Ordnung zwei gleich

$$1+(x-1)-2(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2-2(x-1)(y-1)+(y-1)^2 .$$

AUFGABE 9. (8 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto 1 - t^2.$$

Für welche $x, y \in [0,1]$, $x < y$, besitzt die zugehörige dreistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu f den maximalen Flächeninhalt? Welchen Wert besitzt er?

Lösung

Es seien $0 \leq x \leq y \leq 1$ die Markierungen der möglichen Intervallunterteilungen. Der Flächeninhalt der zugehörigen maximalen unteren Treppenfunktion von f ist

$$\begin{aligned} g(x,y) &= x(1-x^2) + (y-x)(1-y^2) \\ &= x - x^3 + y - y^3 - x + xy^2 \\ &= -x^3 - y^3 + xy^2 + y. \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen davon sind

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -3x^2 + y^2 \text{ und } \frac{\partial g}{\partial y} = -3y^2 + 2xy + 1\,.$$

Wir bestimmen die kritischen Punkte. Aus der ersten Gleichung folgt

$$y = \sqrt{3}x$$

(den negativen Fall kann man ausschließen). Wir setzen $x = \frac{1}{\sqrt{3}}y$ in die zweite Gleichung ein und erhalten die Bedingung

$$-1 = -3y^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}y^2 = \frac{-3\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}y^2,$$

woraus

$$y = \frac{3^{1/4}}{\sqrt{3\sqrt{3}-2}} = \frac{3^{1/4}\cdot 3^{1/4}}{3^{1/4}\cdot\sqrt{3\sqrt{3}-2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9-2\sqrt{3}}}$$

folgt. Daher ist

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9-2\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{9-2\sqrt{3}}}$$

und der einzige kritische Punkt ist

$$\left(\frac{1}{\sqrt{9-2\sqrt{3}}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9-2\sqrt{3}}}\right).$$

Die Hesse-Matrix von g ist

$$\begin{pmatrix} -6x & 2y \\ 2y & -6y+2x \end{pmatrix}.$$

Im kritischen Punkt ist der Eintrag links oben negativ. Die Determinante ist

$$36xy - 12x^2 - 4y^2 \; = \; x^2\left(36\sqrt{3} - 12 - 4\sqrt{3}^2\right) \; = \; x^2\left(36\sqrt{3} - 24\right) \; > \; 0$$

positiv, so dass die Hesse-Matrix negativ definit ist und daher im kritischen Punkt ein Maximum vorliegt. Da es auch in einer geeigneten (kleinen) offenen Umgebung des abgeschlossenen Definitionsbereiches keinen weiteren kritischen Punkt gibt, liegt ein absolutes Maximum vor. Der Wert ist

$$\begin{aligned}
&= -x^3 - y^3 + xy^2 + y \\
&= x\left(-x^2 - 3\sqrt{3}x^2 + 3x^2 + \sqrt{3}\right) \\
&= x\left(x^2\left(2 - 3\sqrt{3}\right) + \sqrt{3}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{9 - 2\sqrt{3}}}\left(\frac{1}{9 - 2\sqrt{3}}\left(2 - 3\sqrt{3}\right) + \sqrt{3}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{9 - 2\sqrt{3}}}\frac{\left(2 - 3\sqrt{3}\right)\left(9 + 2\sqrt{3}\right) + 69\sqrt{3}}{69} \\
&= \frac{1}{\sqrt{9 - 2\sqrt{3}}}\frac{-23\sqrt{3} + 69\sqrt{3}}{69} \\
&= \frac{1}{\sqrt{9 - 2\sqrt{3}}}\frac{2}{3}\sqrt{3} \\
&= \frac{2}{\sqrt{9\sqrt{3} - 6}}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 10. (6 (2+2+2) Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$\varphi : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $(a,b,c,d,u,v) \longmapsto (au + bv + c + d, ad - bc, ac - b^2, bd - c^2)$.

a) Bestimme die Jacobi-Matrix zu dieser Abbildung.

b) Zeige, dass φ im Nullpunkt nicht regulär ist.

c) Zeige, dass φ in $(1,1,0,0,1,1)$ regulär ist.

Lösung

a) Die Jacobi-Matrix ist

$$\begin{pmatrix} u & v & 1 & 1 & a & b \\ d & -c & -b & a & 0 & 0 \\ c & -2b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & -2c & b & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Die Jacobi-Matrix im Nullpunkt ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat den Rang 1, so dass der Nullpunkt nicht regulär ist.

c) Die Jacobi-Matrix in $(1,1,0,0,1,1)$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante der vorderen 4×4-Untermatrix ist $1 \cdot (-1)(-2)(-1)1 = -2 \neq 0$, so dass die ersten vier Spaltenvektoren linear unabhängig sind und daher der Rang der Matrix gleich 4 ist. Daher handelt es sich um einen regulären Punkt.

Aufgabe 11. (5 Punkte)

Bestimme die ersten drei Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = y^2 + t + yt^2$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

Lösung

Wir schreiben das Vektorfeld als $F(t, y) = y^2 + t + yt^2$. Die konstante Anfangsbedingung führt zu $\varphi_0 = 0$. Die erste Picard-Lindelöf-Iteration führt auf

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= \int_0^t F(s, \varphi_0(s))ds \\
&= \int_0^t F(s, 0)ds \\
&= \int_0^t sds \\
&= \frac{1}{2}t^2.
\end{aligned}$$

Die zweite Picard-Lindelöf-Iteration führt auf

$$\begin{aligned}
\varphi_2(t) &= \int_0^t F(s, \varphi_1(s))ds \\
&= \int_0^t \left(\frac{1}{2}s^2\right)^2 + s + \left(\frac{1}{2}s^2\right) s^2 ds \\
&= \int_0^t \frac{1}{4}s^4 + s + \frac{1}{2}s^4 ds \\
&= \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{20}t^5.
\end{aligned}$$

Die dritte Picard-Lindelöf-Iteration führt auf

$$\begin{aligned}
\varphi_3(t) &= \int_0^t F(s, \varphi_2(s))ds \\
&= \int_0^t \left(\frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{20}s^5\right)^2 + s + \left(\frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{20}s^5\right) s^2 ds \\
&= \int_0^t \frac{1}{4}s^4 + \frac{3}{20}s^7 + \frac{9}{400}s^{10} + s + \frac{1}{2}s^4 + \frac{3}{20}s^7 ds \\
&= \int_0^t s + \frac{3}{4}s^4 + \frac{3}{10}s^7 + \frac{9}{400}s^{10} ds \\
&= \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{20}t^5 + \frac{3}{80}t^8 + \frac{9}{4400}t^{11}.
\end{aligned}$$

AUFGABE 12. (4 (2+2) Punkte)
Wir betrachten das Vektorfeld

$$G : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \longmapsto \left(ye^{xy} + \ln\, z,\ xe^{xy} - 2yz,\ \frac{x}{z} - y^2 \right).$$

a) Zeige mit Hilfe der Integrabilitätsbedingung, dass G ein Gradientenfeld ist.

b) Bestimme ein Potential zu G.

Lösung

a) Es ist

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy}$$

und ebenso

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy},$$

es ist

$$\frac{\partial G_1}{\partial z} = \frac{1}{z}$$

und ebenso

$$\frac{\partial G_3}{\partial x} = \frac{1}{z},$$

und schließlich ist

$$\frac{\partial G_2}{\partial z} = -2y$$

und ebenso

$$\frac{\partial G_3}{\partial y} = -2y,$$

die Integrabilitätsbedingungen sind also erfüllt. Da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{>0}$ sternförmig ist, handelt es sich um ein Gradientenfeld.

b) Ein Potential zu G ist

$$f(x, y, z) = x\, \ln\, z + e^{xy} - y^2 z,$$

wie man durch Ableiten bestätigt.

Aufgabe 13. (8 (3+5) Punkte)

Auf einer kreisförmigen Platte P mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0,0)$ sei durch

$$f(x,y) = x^2y + 1$$

eine Massenverteilung gegeben.

a) Bestimme die Gesamtmasse von P.

b) Bestimme den Schwerpunkt von P.

Lösung

a) Es ist

$$\begin{aligned}
\int_P f(x,y)dxdy &= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2y + 1dydx \\
&= \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2y^2 + y\right)|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}dx \\
&= 4\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

b) Die x-Koordinate des Schwerpunktes muss 0 sein, da die Massenverteilung symmetrisch bezüglich der y-Achse (also unter der Spiegelung $x \to -x$) ist.

Die y-Koordinate des Schwerpunktes berechnen wir (mit der Substitution $x = \sin u$) zu

$$\begin{aligned}
y_S &= \frac{1}{\pi}\int_P yf(x,y)dxdy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2y^2 + ydydx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}x^2y^3 + \frac{1}{2}y^2\right)|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{2}{3}x^2\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}dx \\
&= \frac{4}{3\pi}\int_{0}^{1}x^2\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}dx \\
&= \frac{4}{3\pi}\int_{0}^{\pi/2}\left(\sin^2 u\right)\left(1-\sin^2 u\right)(\cos u)(\cos u)\,du \\
&= \frac{4}{3\pi}\int_{0}^{\pi/2}\sin^2 u - 2\sin^4 u + \sin^6 u\,du
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4}{3\pi}\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{3}{8}\pi + \frac{5}{32}\pi\right) \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5}{24} \\
&= \frac{1}{24}.
\end{aligned}
$$

AUFGABE 14. (3 (1+2) Punkte)

a) Schreibe die komplexe Abbildung

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto z^3,$$

in reellen Koordinaten (mit Hilfe der Identifizierung $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i \cong \mathbb{R}^2$).

b) Zeige, dass die beiden Komponentenfunktionen aus Teil a) (also der Realteil und der Imaginärteil von f) harmonische Funktionen sind.

Lösung

a) Es ist

$$z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 = x^3 - 3xy^2 + \left(3x^2y - y^3\right) i,$$

die Komponentenfunktionen sind also $g(x, y) = x^3 - 3xy^2$ und $h(x, y) = 3x^2y - y^3$.

b) Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 g}{\partial^2 y} &= \frac{\partial^2 (x^3 - 3xy^2)}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 (x^3 - 3xy^2)}{\partial^2 y} \\ &= 6x - 6x \\ &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 h}{\partial^2 y} &= \frac{\partial^2 (3x^2y - y^3)}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 (3x^2y - y^3)}{\partial^2 y} \\ &= 6y - 6y \\ &= 0. \end{aligned}$$

Hilfsmittel

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 u \, du = \frac{1}{4}\pi,$$
$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 u \, du = \frac{3}{16}\pi,$$
$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 u \, du = \frac{5}{32}\pi.$$