

## Invariantentheorie

### Arbeitsblatt 8

#### Aufwärmaufgaben

AUFGABE 8.1. Seien  $M \subseteq N$  kommutative Monoide. Zeige, dass durch

$$\tilde{M} = \{n \in N \mid \text{es gibt } k \in \mathbb{N}_+ \text{ mit } kn \in M\}$$

ein Untermonoid von  $N$  gegeben ist, das  $M$  umfasst.

AUFGABE 8.2. Wir betrachten die kommutativen Monoide  $M = \mathbb{N}^r$  und  $N = \mathbb{N}^s$ . Zeige, dass ein Monoidhomomorphismus von  $M$  nach  $N$  eindeutig durch eine Matrix (mit  $r$  Spalten und  $s$  Zeilen) mit Einträgen aus  $\mathbb{N}$  bestimmt ist.

AUFGABE 8.3. Sei  $M$  ein kommutatives Monoid. Zeige, dass die zugehörige Differenzgruppe  $\Gamma = \Gamma(M)$  eine kommutative Gruppe ist, und dass sie folgende universelle Eigenschaft besitzt: Zu jedem Monoidhomomorphismus

$$\varphi: M \longrightarrow G$$

in eine Gruppe  $G$  gibt es einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus

$$\tilde{\varphi}: \Gamma \longrightarrow G,$$

der  $\varphi$  fortsetzt.

AUFGABE 8.4. Sei  $M$  ein kommutatives Monoid mit zugehöriger Differenzgruppe  $\Gamma = \Gamma(M)$ . Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

- (1)  $M$  ist ein Monoid mit Kürzungsregel.
- (2) Die kanonische Abbildung  $M \rightarrow \Gamma(M)$  ist injektiv.
- (3)  $M$  lässt sich als Untermonoid einer Gruppe realisieren.

AUFGABE 8.5. Sei  $R$  ein kommutativer Ring. Beweise die  $R$ -Algebraisomorphie

$$R[\mathbb{Z}^n] \cong R[X_1, \dots, X_n]_{X_1 \cdots X_n}$$

mit Hilfe der universellen Eigenschaften von Monoidringen und Nenneraufnahmen.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 8.6. (4 Punkte)

Es sei  $K$  ein Körper und  $G$  eine Gruppe. Dann können wir den Monoidring  $K[G]$  betrachten. Sei nun weiter  $M$  ein  $K[G]$ -Modul. Zeige, dass

- (1)  $M$  nichts anderes ist als ein  $K$ -Vektorraum  $V$  zusammen mit einem Gruppenhomomorphismus  $\rho : G \rightarrow \text{Aut}_K(V)$ .
- (2) ein  $K[G]$ -Modulhomomorphismus  $\varphi : M \rightarrow M$  eine  $K$ -lineare Abbildung ist, für die zusätzlich  $\varphi \circ \rho(g) = \rho(g) \circ \varphi$  für alle  $g \in G$  gilt.

Bemerkung:  $\rho$  heißt dann eine *Darstellung* von  $G$ . Solche Darstellungen sind oft einfacher zu handhaben als  $G$  und man kann mit Hilfe von  $\rho$  oft hilfreiche Erkenntnisse über  $G$  selbst gewinnen.

## Abbildungsverzeichnis