Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 19

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 19.1. Es sei $M \subseteq \mathbb{Z}^n$ ein normales, spitzes, endlich erzeugtes Monoid und K ein Körper. Zeige, dass der Monoidring $K[M]$ eine positive Graduierung besitzt.

Aufgabe 19.2. Bestimme die Hilbert-Reihe von $K[X,Y]/(X^3, Y^5, X^2Y^2)$ in der Standardgraduierung.

Aufgabe 19.3. Es sei K ein Körper und seien A und B endlich erzeugte positiv-graduierte K-Algebren. Zeige, dass zwischen den Hilbert-Reihen die Beziehung

$$H(A \otimes_K B) = H(A) \cdot H(B)$$

besteht, wobei $A \otimes_K B$ mit der natürlichen $\mathbb{N}$-Graduierung (wie sieht die aus?) versehen sei.

Aufgabe 19.4. Es sei K ein Körper und sei R eine endlich erzeugte, kommutative, positiv-graduierte K-Algebra und $\ell \in \mathbb{N}$. Welche Beziehung besteht zwischen der Hilbert-Reihe von R und der Hilbert-Reihe des ℓ-ten Veronese-Ringes $R^{(\ell)}$.

Aufgabe 19.5. Zeige, dass die Definition 19.5 der Spur einer linearen Abbildung unabhängig von der gewählten Matrix ist.

Aufgabe 19.6. Es sei K ein Körper und sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Zeige, dass die Zuordnung

$$\operatorname{End}(V) \longrightarrow K,\ \varphi \longmapsto \operatorname{Spur}(\varphi),$$

K-linear ist.

Aufgabe 19.7. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Wie findet man die $\operatorname{Spur}(M)$ im charakteristischen Polynom χ_M wieder?

Aufgabe 19.8. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K mit der Eigenschaft, dass das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt, also

$$\chi_M = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdot (X - \lambda_2)^{\mu_2} \cdots (X - \lambda_k)^{\mu_k} .$$

Zeige, dass

$$\operatorname{Spur}(M) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \lambda_i$$

ist.

Aufgabe 19.9. Sei K ein Körper und sei $P = X^n - c \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom. Es sei

$$f \,=\, a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \ldots + a_1 X + a_0$$

ein Element in der einfachen endlichen Körpererweiterung $K \subseteq L = K[X]/(P)$ vom Grad n. Zeige, dass die Spur von f (aufgefasst als Endomorphismus auf L) gleich na_0 ist.

Aufgabe 19.10. Zeige, dass man jede endliche zyklische Gruppe $\mathbb{Z}/(n)$ in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ sowohl als Reflektionsgruppe als auch als eine Gruppe ohne Pseudoreflektionen realisieren kann.

Aufgabe 19.11. Zeige, dass die alternierende Gruppe A_n in ihrer natürlichen Realisierung in $\mathrm{GL}_n(K)$ keine Pseudoreflektionen enthält.

Aufgabe 19.12. Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K und $L = K(X)$ sein Quotientenkörper. Bestimme die L-wertigen Punkte von $K[X] \otimes_K K[X]$. Welcher Punkt entspricht der (zweifach genommenen) natürlichen Inklusion $K[X] \subseteq K(X)$?

Aufgabe 19.13. Es sei K ein Körper und sei $A = K[X_1, \ldots, X_n]$. Definiere eine Hopf-Algebrastruktur auf A derart, dass zu jeder kommutativen K-Algebra L ein natürlicher Gruppenisomorphismus

$$(\operatorname{Spek}(K[X_1, \ldots, X_n]))(L) \,\cong\, (L^n, +)$$

besteht.

Bei den beiden folgenden Aufgaben denke man an lineare Gleichungen, insbesondere daran, wie sich die Lösungen einer homogenen Gleichung zu den Lösungen einer inhomogenen Gleichung verhalten.

Aufgabe 19.14. Es sei R ein kommutativer Ring, $f_1, \ldots, f_n \in R$ und

$$A = R[T_1, \ldots, T_n]/(f_1T_1 + \ldots + f_nT_n).$$

Definiere eine Hopf-Algebrastrutur auf A (über R).

Aufgabe 19.15. Es sei R ein kommutativer Ring, $f_1, \ldots, f_n, f \in R$. Wir setzen

$$A = R[T_1, \ldots, T_n]/(f_1T_1 + \ldots + f_nT_n),$$

versehen mit der in Aufgabe 19.14 diskutierten Hopf-Algebrastruktur, und

$$B = R[T_1, \ldots, T_n]/(f_1T_1 + \ldots + f_nT_n + f).$$

Definiere eine Kooperation von A auf B (über R).

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 19.16. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und sei R eine endlich erzeugte, kommutative, positiv-graduierte K-Algebra. Zeige, dass die Hilbert-Reihe von R genau dann ein Polynom ist, wenn die Krulldimension von R null ist.

Aufgabe 19.17. (2 Punkte)

Begründe mit dem Satz von Chevalley-Shephard-Todd, dass der Ring der symmetrischen Polynome ein Polynomring ist.