Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Vorlesung 19

Die Hilbert-Reihe und die Formel von Molien

Definition 19.1. Es sei K ein Körper und R eine positiv-graduierte kommutative K-Algebra mit der Eigenschaft, dass für jedes $d \in \mathbb{N}$ die Stufe R_d endlichdimensional ist. Dann nennt man die Potenzreihe

$$\sum_{d=0}^{\infty} \dim_K (R_d)\, z^d$$

die *Hilbert-Reihe* von R.

Die lineare Operation von einer endlichen Gruppe G auf einem K-Vektorraum V bzw. auf dem zueghörigen Polynomring $K[V]$ induziert eine K-lineare Operation $R_d \to R_d$ in jeder Stufe und der Invariantentring ist selbst graduiert. Dies ermöglicht folgende Definition.

Definition 19.2. Die endliche Gruppe G operiere linear auf dem Polynomring $R = K[X_1, \ldots, X_n]$. Dann nennt man die Potenzreihe

$$\Phi_G(z) = \sum_{d=0}^{\infty} \dim_K \left(R_d^G\right) z^d$$

die *Hilbert-Reihe* (oder *Molien-Reihe*) zu dieser Operation.

Die Dimensionen der homogenen Stufen sind endlich und daher ist diese Defintion sinnvoll. Die Hilberreihe ist eine Potenzreihe in einer (komplexen) Variablen z.

Die Dimension des Fixraumes zu einer linearen Operation kann man über die Spur der einzelnen Automorphismen berechnen. Wir erinnern an die Definition der *Spur* einer Matrix und eines Endomorphismus.

Definition 19.3. Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $n \times n$-Matrix über K. Dann heißt

$$\operatorname{Spur}(M) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

die *Spur* von M.

Definition 19.4. Es sei K ein Körper und sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung, die bezüglich einer Basis durch die Matrix M beschrieben werde. Dann nennt man $\operatorname{Spur}(M)$ die *Spur* von φ, geschrieben $\operatorname{Spur}(\varphi)$.

Diese Definition ist unabhängig von der gewählten Basis, siehe Aufgabe *****.

LEMMA 19.5. *Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, auf dem eine endliche Gruppe G linear operiere. Die Gruppenordnung sei kein Vielfaches der Charakteristik von K. Dann besitzt der Fixraum der Operation (also der gemeinsame Eigenraum zum Eigenwert 1) die Dimension*

$$\dim_K\left(V^G\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\operatorname{Spur}(\sigma).$$

Beweis. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\pi = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\sigma.$$

Zu $w \in V$ ist $\pi(w)$ G-invariant und für $v \in V^G$ ist $\pi(v) = v$. Daher ist π eine lineare Projektion

$$V \longrightarrow V^G.$$

Eine lineare Projektion wird in einer geeigneten Basis durch eine Diagonalmatrix beschrieben, in der $m = \dim_K(V)$ Einsen und sonst Nullen stehen. Die Behauptung folgt daraus, dass die Spur additiv ist. □

Der folgende Satz berechnet die Hilbert-Reihe (Formel von Molien).

SATZ 19.6. *Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0. Die endliche Gruppe G operiere linear auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V. Dann ist*

$$\Phi_G(z) = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\frac{1}{\det\,(\mathrm{Id} - z\sigma)}.$$

Beweis. Der lineare Automorphismus σ ist nach Satz 3.19 diagonalisierbar, da er endliche Ordnung hat. In einer geeigneten Basis besitzt die duale Abbildung σ^* die Gestalt

$$X_i \longmapsto \xi_i X_i\,.$$

Auf der d-ten Stufe induziert dies den linearen Automorphismus

$$\sigma^{(d)}\colon\ K[V]_d \longrightarrow K[V]_d$$

mit $X^\nu \longmapsto \xi^\nu X^\nu$. Die Eigenvektoren von $\sigma^{(d)}$ sind die $\binom{n+d-1}{d}$ verschiedenen Monome

$$X_1^{\nu_1}\cdots X_n^{\nu_n}$$

mit $\nu_1 + \ldots + \nu_n = d$ mit den Eigenwerten $\xi_1^{\nu_1}\cdots\xi_n^{\nu_n}$. Die Spur von $\sigma^{(d)}$ ist daher

$$\operatorname{Spur}\left(\sigma^{(d)}\right) = \sum_{|\nu|=d}\xi^\nu.$$

Nach Fakt ***** ergibt sich

$$\dim_K\left(V_d^G\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\operatorname{Spur}\left(\sigma^{(d)}\right)$$

mit

$$\operatorname{Spur}\left(\sigma^{(d)}\right) = \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_n=d}\xi_1^{\nu_1}\cdots\xi_n^{\nu_n}.$$

Damit ist (mit $n=|G|$) unter Verwendung der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned}
\Phi_G(z) &= \sum_{d=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{\sigma\in G}\operatorname{Spur}\left(\sigma^{(d)}\right)\right)z^d\\
&= \frac{1}{n}\sum_{d=0}^{\infty}\left(\sum_{\sigma\in G}\sum_{\nu_1+\ldots+\nu_n=d}\xi_{\sigma,1}^{\nu_1}\cdots\xi_{\sigma,n}^{\nu_n}\right)z^d\\
&= \frac{1}{n}\sum_{\sigma\in G}\sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in\mathbb{N}^n}\xi_{\sigma,1}^{\nu_1}\cdots\xi_{\sigma,n}^{\nu_n}z^{\nu_1+\ldots+\nu_n}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{\sigma\in G}\left(\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\xi_{\sigma,1}^{\nu_1}z^{\nu_1}\right)\cdots\left(\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\xi_{\sigma,n}^{\nu_n}z^{\nu_n}\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{\sigma\in G}\frac{1}{(1-z\xi_{\sigma,1})\cdots(1-\xi_{\sigma,n})}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{\sigma\in G}\frac{1}{\det\left(\operatorname{Id}-z\sigma\right)}.
\end{aligned}$$

□

Die Formel besagt insbesondere, dass diese Potenzreihe eine rationale Funktion (also ein Quotient aus zwei Polynomen) ist und daher nur endlich viele Polstellen hat.

Die Hilbert-Reihe eines Polynomringes, wobei die Variablen positiven Grad besitzen, hat folgende Gestalt.

LEMMA 19.7. *Es sei K ein Körper und es sei $R=K[X_1,\ldots,X_n]$ der Polynomring über K, wobei die X_i den positiven Grad $d_i\in\mathbb{N}_+$ haben mögen. Dann ist die Hilbert-Reihe dieses Ringes gleich*

$$H(R,z) = \frac{1}{(1-z^{d_1})\cdots(1-z^{d_n})}.$$

Beweis. Die Monome $X_1^{\nu_1}\cdots X_n^{\nu_n}$ vom Gesamtgrad $d=\sum_{j=1}^n\nu_j$ bilden eine K-Basis von R_d. Die Dimension der d-ten Stufe R_d ist also die Anzahl der Elemente in der Menge

$$A_d := \{(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in\mathbb{N}^n \,|\, \nu_1d_1+\ldots+\nu_nd_n=d\}.$$

Die Behauptung folgt somit aus

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z^{d_1}}\cdots\frac{1}{1-z^{d_n}} &= \left(\sum_{\nu_1=0}^{\infty} z^{\nu_1 d_1}\right)\cdots\left(\sum_{\nu_n=0}^{\infty} z^{\nu_n d_n}\right)\\ &= \sum_{d=0}^{\infty}\ \sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in A_d} z^d\\ &= \sum_{d=0}^{\infty} |A_d|\, z^d.\end{aligned}$$

□

Der Satz von Chevalley-Shephard-Todd

Wir wenden uns nun der Charakterisierung derjenigen linearen Operationen auf dem Polynomring zu, die zu einem Invariantenring führen, der selbst ein Polynomring ist.

Definition 19.8. Ein linearer Automorphismus auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum heißt *Pseudoreflektion* (oder *Pseudospiegelung*), wenn er in einer geeigneten Basis durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \zeta \end{pmatrix},$$

wobei $\zeta \neq 1$ eine Einheitswurzel ist, beschrieben werden kann.

Eine Pseudoreflektion besitzt also eine Hyperebene (einen $(n-1)$-dimensionalen Untervektorraum), auf der sie fix ist (der Eigenraum zum Eigenwert 1) und einen weiteren dazu linear unabhängigen Eigenvektor zum Eigenwert ζ. Die Ordnung der Einheitswurzel ζ bestimmt auch die Ordnung der Pseudoreflektion. Das Inverse einer Pseudoreflektion ist wieder eine Pseudoreflektion.

Definition 19.9. Eine endliche Untergruppe $G \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ heißt *Reflektionsgruppe* (oder *Spiegelungsgruppe*), wenn sie durch Pseudoreflektionen erzeugt wird.

Dies ist eine Eigenschaft der Untergruppe, also der Darstellung der Gruppe, nicht der abstrakten Gruppe G. In einer Reflektionsgruppe kann man jedes Element τ als ein Produkt $\tau = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ mit Pseudoreflektionen σ_j schreiben.

Die Bedeutung von Reflektionsgruppen in der Invariantentheorie kommt im folgenden wichigen Satz, dem *Satz von Chevalley-Shephard-Todd*, zum Ausdruck.

SATZ 19.10. *Es sei K ein algebaisch abgeschlossener Körper der Charakteristik null. Die endliche Gruppe G operiere linear und treu auf dem K-Vektorraum V. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *$G \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ ist eine Reflektionsgruppe.*
(2) *Der Invariantenring $K[V]^G$ ist (isomorph zu einem) ein Polynomring.*

Der Beweis benutzt verschiedene Lemmata und verwendet die Theorie der Hilbert-Reihen. Hierbei werden verschiedene elementare Hilfsmittel aus der Funktionentheorie verwendet.

LEMMA 19.11. *Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\sigma \in \mathrm{GL}_n(K)$ eine Pseudoreflektion. Es sei H_σ der Fixraum zu σ und L_σ eine Linearform $\neq 0$, die auf H_σ verschwindet. Dann ist L_σ für jedes Polynom $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Teiler von $f\sigma - f$.*

Beweis. Für $v \in H_\sigma$ ist

$$(f\sigma - f)(v) \,=\, f(\sigma v) - f(v) \,=\, f(v) - f(v) \,=\, 0.$$

Das Polynom $f\sigma - f$ verschwindet also auf der Nullstellenmenge von L_σ. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz ist eine Potenz von $f\sigma - f$ ein Vielfaches von L_σ. Da die Linearform ein irreduzibles Polynom ist, muss $f\sigma - f$ selbst ein Vielfaches von L_σ sein. □

LEMMA 19.12. *Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $G \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ eine Reflektionsgruppe. Es sei I_G das Ideal in $K[X_1, \ldots, X_n]$, das durch die homogenen Invarianten von einem positiven Grad erzeugt wird. Es gelte*

$$g_1 h_1 + \ldots + g_m h_m \,=\, 0,$$

wobei die $h_1, \ldots, h_m \in K[X_1, \ldots, X_n]$ homogene Polynome und die $g_1, \ldots, g_m \in K[X_1, \ldots, X_n]^G$ invariante Polynome seien. Dann ist $h_1 \in I_G$ oder $g_1 \in (g_2, \ldots, g_m)$.

Beweis. Wir führen Induktion über den Grad von h_1. Bei $h_1 = 0$ gehört natürlich h_1 zu I_G. Für $h_1 \neq 0$ und $\operatorname{grad}(h_i) = 1$ ist $g_1 \in (g_2, \ldots, g_m)$. Sei also $\operatorname{grad}(h_i) \geq 1$ $\deg(h_i) \geq 1$ und die Aussage für kleineren Grad bewiesen. Es sei $g_1 \notin (g_2, \ldots, g_m)$ vorausgesetzt und es sei $\sigma \in G$ eine Pseudoreflektion. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{m} g_i \cdot (h_i \sigma) \,=\, \left(\sum_{i=1}^{m} g_i h_i \right) \sigma \,=\, 0\sigma \,=\, 0.$$

Nach Fakt ***** kann man

$$h_i \sigma \,=\, h_i + L_\sigma \cdot \widetilde{h}_i$$

schreiben, wobei L_σ eine beschreibende Linearform des Eigenraumes zu σ ist und $\widetilde{h}_i$ einen kleineren Grad als h_i besitzt. Wir schreiben die obige Gleichung als

$$0 = \sum_{i=1}^{m} g_i \left(h_i + L_\sigma \widetilde{h}_i \right) = L_\sigma \sum_{i=1}^{m} g_i \widetilde{h}_i .$$

Daher ist die Summe rechts gleich 0 und nach Induktionsvoraussetzung ist $\widetilde{h}_i \in I_G$, also auch $h_1\sigma - h_1 = \widetilde{h}_i L_\sigma \in I_G$.

Sei nun $\tau = \sigma_1 \cdots \sigma_k \in G$ ein Produkt von Pseudoreflektionen. Dann ist

$$\begin{aligned} h_1\tau - h_1 &= \sum_{i=1}^{k} \left(h_1\sigma_i \cdots \sigma_k - h_1\sigma_{i+1} \cdots \sigma_k \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left(h_1\sigma_i - h_1 \right) \left(\sigma_{i+1} \cdots \sigma_k \right) . \end{aligned}$$

Da $h_1\sigma_i - h_1$ zu I_G gehört und I_G unter G invariant ist, gehört auch $h_1\tau - h_1$ zu I_G.

Mit dem Reynolds-Operator ρ und der Gruppenordnung $n = \#(G)$ ist

$$\rho(h_1) - h_1 = \frac{1}{n} \sum_{\tau \in G} h_1\tau - h_1 = \frac{1}{n} \sum_{\tau \in G} (h_1\tau - h_1).$$

Dies gehört zu I_G und wegen $\rho(h_1) \in I_G$ ist auch $h_1 \in I_G$. $\square$

Abbildungsverzeichnis