

## Algebraische Kurven

### Arbeitsblatt 25

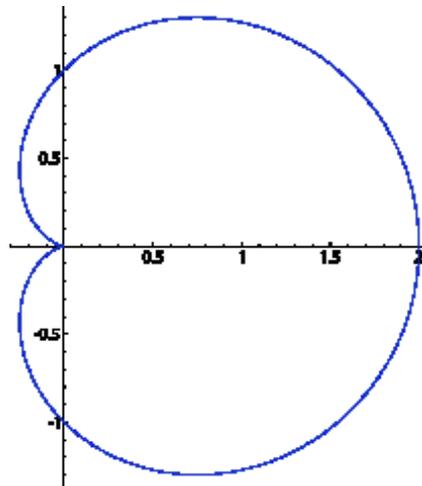
#### Aufwärmaufgaben

AUFGABE 25.1. Berechne die ersten fünf Glieder (bis einschließlich  $c_4$ ) der eingesetzten Potenzreihe  $F(G)$  im Sinne von Definition.

AUFGABE 25.2. Bestimme die Singularitäten (mit Multiplizitäten und Tangenten) der durch

$$V((X^2 + Y^2)^2 - 2X(X^2 + Y^2) - Y^2)$$

gegebenen *Kardioide*.



AUFGABE 25.3.\*

Bestimme für die ebene algebraische Kurve

$$V(X^3 + Y^2 - XY + X)$$

eine nichtkonstante Potenzreihenlösung  $X = F(Y)$  im Nullpunkt bis zum sechsten Glied.

## AUFGABE 25.4.\*

Bestimme für die ebene algebraische Kurve

$$V(X^2Y + X^2 + Y^2 - 5XY + Y)$$

eine nicht-konstante Potenzreihenlösung  $Y = F(X)$  im Nullpunkt bis zur fünften Ordnung.

Die folgenden Aufgaben beschäftigen sich mit der Kompletzierung eines lokalen Ringes.

AUFGABE 25.5. Betrachte zu einem lokalen Ring  $R$  mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$  das Diagramm

$$\longrightarrow R/\mathfrak{m}^4 \longrightarrow R/\mathfrak{m}^3 \longrightarrow R/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow R/\mathfrak{m}.$$

Dabei sind die Abbildungen die kanonischen Projektionen  $\varphi_n : R/\mathfrak{m}^{n+1} \rightarrow R/\mathfrak{m}^n$ , die durch die Idealinklusionen  $\mathfrak{m}^{n+1} \subseteq \mathfrak{m}^n$  induziert werden. Eine Folge von Elementen

$$a_n \in R/\mathfrak{m}^n$$

heißt *verträglich*, wenn  $\varphi_n(a_{n+1}) = a_n$  gilt für alle  $n$ . Definiere eine Ringstruktur auf der Menge aller verträglichen Elemente (diesen Ring nennt man die *Kompletzierung* von  $R$ .) Zeige ferner, dass es einen kanonischen Ringhomomorphismus von  $R$  in die Kompletzierung gibt.

AUFGABE 25.6. Sei  $R$  ein eindimensionaler lokaler noetherscher kommutativer Ring. Zeige, dass die kanonische Abbildung von  $R$  in die Kompletzierung von  $R$  injektiv ist.

Bemerkung: Die Injektivität gilt für jeden noetherschen lokalen Ring, ist aber schwieriger zu beweisen.

AUFGABE 25.7. Sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $I$  ein Ideal. Zeigen Sie, dass durch

$$\{x + I^n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in R)$$

Umgebungsbasen definiert werden. Zeigen Sie außerdem, dass die auf  $R$  induzierte Topologie genau dann hausdorffsch ist, wenn  $\bigcap_n I^n = \{0\}$ .

Bemerkung: Die Kompletzierung eines lokalen Ringes bezüglich seines maximalen Ideals entspricht dann genau der (topologischen) Kompletzierung bezüglich dieser Topologie.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 25.8. (4 Punkte)

Betrachte die Kardioide

$$V((X^2 + Y^2)^2 - 2X(X^2 + Y^2) - Y^2)$$

im Punkt  $(2, 0)$ . Bestimme eine formale Parametrisierung (bis zum fünften Term) der Kurve in diesem Punkt in Abhängigkeit von einem Tangentenparameter.

AUFGABE 25.9. (4 Punkte)

Betrachte den Einheitskreis  $X^2 + Y^2 = 1$  im Punkt  $(1, 0)$ . Bestimme Potenzreihen  $G$  und  $H \in K[[T]]$  mit den Anfangsbedingungen  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0$ ,  $b_0 = 0$ ,  $b_1 = 1$  und mit  $G(T)^2 + H(T)^2 = 1$ .

AUFGABE 25.10. (4 Punkte)

Betrachte die Neilsche Parabel  $C = V(Y^3 - X^2)$  im Punkt  $(1, 1)$ . Finde eine Parametrisierung der Kurve in diesem Punkt mit Potenzreihen (bis zum fünften Glied) derart, dass eine Potenzreihe davon ein lineares Polynom ist.

AUFGABE 25.11. (3 Punkte)

Sei  $K$  ein Körper. Eine *formale Laurentreihe* ist eine unendliche Summe der Form

$$F = \sum_{n=k}^{\infty} a_n T^n \text{ mit } a_n \in K \text{ und } k \in \mathbb{Z}.$$

Zeige, dass der Ring der formalen Laurentreihen (mit geeigneten Ringoperationen) isomorph zum Quotientenkörper des Potenzreihenringes  $K[[T]]$  ist.

AUFGABE 25.12. (4 Punkte)

Sei  $K$  ein Körper und sei  $K[T]$  der Polynomring in einer Variablen. Es sei  $R$  die Lokalisierung von  $K[T]$  am maximalen Ideal  $\mathfrak{m} = (T)$ . Zeige, dass die Kompletterung von  $R$  isomorph zum Potenzreihenring  $K[[T]]$  ist.

### Aufgabe zum Hochladen

AUFGABE 25.13. (4 Punkte)

Zeichne mittels eines geeigneten Programms eine der Beispielkurven der Vorlesung sowie die verschiedenen dort berechneten polynomialen Approximationen.