Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 5

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 5.1. Sei $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein homogenes Polynom mit Nullstellenmenge $V(F)$. Zeige, dass für jeden Punkt $P \in V(F)$ und jeden Skalar $\lambda \in K$ auch $\lambda P \in V(F)$ ist.

Aufgabe 5.2. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $F \in K[X, Y]$ ein homogenes Polynom. Zeige: F zerfällt in Linearfaktoren.

Aufgabe 5.3. Zeige, dass ein homogenes Polynom unter einer linearen Variablentransformation homogen vom gleichen Grad bleibt, und dass dies bei einer affin-linearen Variablentransformation nicht sein muss.

Die folgenden zwei Aufgaben dienen dem Verständnis von Satz 5.4 und Korollar 5.5.

Aufgabe 5.4. Wende den Beweis zu Satz 5.4 auf das Polynom Y an.

Aufgabe 5.5. Sei $F \in \mathbb{C}[X, Y]$ ein nicht-konstantes Polynom. Zeige, dass die zugehörige algebraische Kurve $C = V(F)$ überabzählbar viele Elemente besitzt.

Aufgabe 5.6. Berechne das Bild $\tilde{F}$ des Polynoms

$$F = X^2Y + 3XY - Y^3$$

unter dem durch

$$X \longmapsto T^2 + S - 3,\ Y \longmapsto 3TS + S^2 - T$$

definierten Einsetzungshomomorphismus

$$K[X, Y] \longrightarrow K[S, T]\,.$$

Aufgabe 5.7. Seien R und S kommutative Ringe und sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in S. Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ ein Primideal in R ist.

Zeige durch ein Beispiel, dass das Urbild eines maximalen Ideales kein maximales Ideal sein muss.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 5.8. (3 Punkte)

Wie viele Monome vom Grad d gibt es im Polynomring in einer, in zwei und in drei Variablen?

Aufgabe 5.9. (3 Punkte)

Wende den Beweis zu Satz 5.4 auf die algebraische Kurve an, die zur rationalen Funktion

$$Y = \frac{X^2 - 2X}{X^2 - 1}$$

gehört.

Aufgabe 5.10. (3 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\mathbb{A}_K^2 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2 \, , (x, y) \longmapsto (x, xy) \, .$$

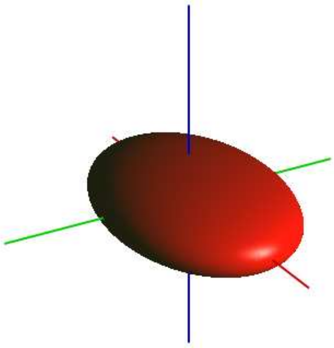
Bestimme das Bild und die Fasern dieser Abbildung.

Aufgabe 5.11. (3 Punkte)

Betrachte das *Ellipsoid*

$$E = V(2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 5) = \{(x, y, z) : \, 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 5\} \, .$$

Finde eine affin-lineare Variablentransformation(über $\mathbb{R}$) derart, dass das Bild von E unter der Abbildung die *Standardkugel* $V(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ wird.



Ein Ellipsoid: In der algebraischen Geometrie ist damit die Oberfläche gemeint.

Aufgabe 5.12. (4 Punkte)

Seien V und $\tilde{V}$ affin-algebraische Mengen in $\mathbb{A}_K^2$ zu $K = \mathbb{Z}/(2)$. Zeige, dass diese beiden Mengen affin-linear äquivalent sind genau dann, wenn sie die gleiche Anzahl besitzen.

Zeige ebenso, dass dies bei $K = \mathbb{Z}/(p)$ für $p \geq 3$ und auch für $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}/(2)}$ für $n \geq 3$ nicht gilt.