Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

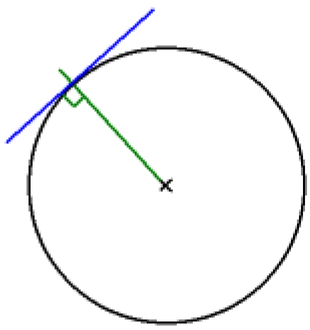
Arbeitsblatt 22

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 22.1. Sei K ein Körper der positiven Charakteristik $p > 0$. Bestimme die Menge der Polynome $F \in K[T]$ mit formaler Ableitung $F' = 0$.

AUFGABE 22.2. Sei K ein Körper und $F \in K[X, Y]$ ein nichtkonstantes Polynom mit einfachen Primfaktoren und mit zugehöriger ebener Kurve $C = V(F)$. Zeige, dass C nur endlich viele singuläre Punkte besitzt.

AUFGABE 22.3. Beweise Lemma 22.11.



AUFGABE 22.4. Zeige, dass der Einheitskreis über einem Körper der Charakteristik $\neq 2$ glatt ist und bestimme für jeden Punkt die Gleichung der Tangente.

AUFGABE 22.5. Sei K ein Körper.

a) Zeige, dass der Graph eines Polynoms $F \in K[X]$ eine glatte algebraische Kurve ist.

b) Seien $F, G \in K[X]$ Polynome ohne gemeinsame Nullstelle. Zeige, dass der Graph der rationalen Funktion F/G ebenfalls eine glatte algebraische Kurve ist.

Aufgabe 22.6.*

Bestimme die singulären Punkte der ebenen algebraischen Kurve

$$V\left(-2X^3+3X^2Y-Y+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}\,.$$

Aufgabe 22.7.*

Es sei $P \in C = V(F) \subset \mathbb{A}^2_K$ ein glatter Punkt einer ebenen irreduziblen Kurve. Zeige, dass der zugehörige lokale Ring ein diskreter Bewertungsring ist.

Aufgabe 22.8. Bestimme für die in Beispiel 8.5 berechnete Trajektorie die Koordinaten der Punkte, wo die Kurve singulär ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 22.9. (3 Punkte)

Sei K ein Körper der Charakteristik $p \geq 0$. Man charakterisiere die Polynome $F \in K[X,Y]$ mit der Eigenschaft, dass

(1) die erste partielle Ableitung
(2) die zweite partielle Ableitung
(3) beide partiellen Ableitungen

null sind.

Aufgabe 22.10. (3 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $G,H \in K[X,Y]$ Polynome mit $G(P) = H(P) = 0$ für einen bestimmten Punkt $P \in \mathbb{A}^2_K$. Es sei $F = GH$. Zeige, dass jede Tangente von G in P und jede Tangente von H in P auch eine Tangente von F in P ist.

Aufgabe 22.11. (6 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Betrachte die Kurve

$$C = V(x^3+5x^2y-6xy^2-x^2-xy+4y^2)\,.$$

(1) Bestimme die Tangenten im Nullpunkt.
(2) Zeige, dass $P = (1,2)$ ein Punkt der Kurve ist, und berechne die Tangente(n) von C in P über die Ableitung.

(3) Führe eine Variablentransformation durch derart, dass P in den neuen Variablen der Nullpunkt ist, und bestimme die Tangente(n) in P aus der transformierten Kurvengleichung.

Aufgabe 22.12. (4 Punkte)

Bestimme für die algebraische Kurve

$$C = V(9y^4 + 10x^2y^2 + x^4 - 12y^3 - 12x^2y + 4y^2)$$

die Singularitäten sowie deren Multiplizität und Tangenten (vergleiche Beispiel 8.5).

Aufgabe 22.13. (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Eine *Potenzreihe in einer Variablen* über K ist ein formaler Ausdruck der Form

$$a_0 + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3 + \ldots \text{ mit } a_i \in K\,.$$

Es kann hier also unendlich viele von null verschiedene Koeffizienten a_i geben. Definiere eine Ringstruktur auf der Menge aller Potenzreihen, die die Ringstruktur auf dem Polynomring in einer Variablen fortsetzt. Zeige, dass dieser Ring ein diskreter Bewertungsring ist.

Aufgabe 22.14. (5 Punkte)

Zeige, dass ein noetherscher abstrakter Bewertungsring schon diskret ist.