Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Vorlesung 29

Ableitung von Potenzreihen

SATZ 29.1. *Es sei*

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

eine

konvergente Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist auch die formal abgeleitete Potenzreihe

$$\tilde{g} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}$$

konvergent mit demselben Konvergenzradius. Die durch die Potenzreihe g dargestellte Funktion f ist in jedem Punkt $z \in U(a,R)$ differenzierbar mit

$$f'(z) = \tilde{g}(z)\,.$$

Beweis. Sei $s \in \mathbb{R}_+$, $s < R$, vorgegeben und sei r mit $s < r < R$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, r^n$. Wegen $n \leq (\frac{r}{s})^n$ für n hinreichend groß ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n\, |a_n|\, s^{n-1} &= \sum_{n=1}^{N} n\, |a_n|\, s^{n-1} + \sum_{n=N+1}^{\infty} n\, |a_n|\, s^{n-1} \\ &\leq \sum_{n=1}^{N} n\, |a_n|\, s^{n-1} + \frac{1}{s} \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|\, r^n, \end{aligned}$$

so dass die Potenzreihe $\tilde{g}$ in $B(a,s)$ und somit in $U(a,R)$ konvergiert (dafür, dass der Konvergenzradius von $\tilde{g}$ nicht größer als R ist, siehe Aufgabe 29.2). Die Potenzreihe

$$\rho(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-a)^{n-1}$$

ist ebenfalls in dieser Kreisscheibe konvergent und besitzt in a den Wert 0. Daher zeigt die Gleichung

$$f(z) = f(a) + a_1(z-a) + \rho(z)(z-a)\,,$$

dass f in a differenzierbar ist mit der Ableitung $f'(a) = a_1 = \tilde{g}(a)$. Sei nun $b \in U(a,R)$. Nach dem Entwicklungssatz gibt es eine konvergente Potenzreihe mit Entwicklungspunkt b,

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-b)^n \, ,$$

deren dargestellte Funktion mit der durch g dargestellten Funktion in einer offenen Umgebung von b übereinstimmt, und wobei

$$b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (b-a)^{n-1}$$

gilt. Daher gilt nach dem schon Bewiesenen (angewendet auf h und die formale Potenzreihenableitung $\tilde{h}$)

$$f'(b) \; = \; \tilde{h}(b) \; = \; b_1 \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (b-a)^{n-1} \; = \; \tilde{g}(b).$$

$\square$

Satz 29.2. *Die Exponentialfunktion*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto \exp\, z,$$

ist differenzierbar mit

$$\exp{}'(z) = \exp\, z \, .$$

Beweis. Aufgrund von Satz 29.1 ist

$$\begin{aligned}
\exp{}'(z) \;&=\; \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\Big)' \\
&=\; \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{z^n}{n!}\Big)' \\
&=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} \\
&=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} \\
&=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\
&=\; \exp\, z.
\end{aligned}$$

$\square$

Korollar 29.3. *Die Ableitung des natürlichen Logarithmus*

$$\ln : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \ln\, x,$$

ist

$$\ln{}' : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 29.4. □

KOROLLAR 29.4. *Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion*

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\, x \longmapsto x^\alpha,$$

differenzierbar und ihre Ableitung ist

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\,.$$

Beweis. Nach Aufgabe 26.10 ist

$$x^\alpha = \exp(\alpha \,\ln\, x)\,.$$

Die Ableitung nach x ist aufgrund von Satz 29.2 und Satz 29.3 gleich

$$(x^\alpha)' \;=\; (\exp(\alpha\,\ln\,x))' \;=\; \frac{\alpha}{x} \cdot \exp(\alpha\,\ln\,x) \;=\; \frac{\alpha}{x}x^\alpha \;=\; \alpha x^{\alpha-1}.$$

□

KOROLLAR 29.5. *Für die eulersche Zahl gilt die Gleichheit*

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \exp\,1\,.$$

Beweis. Die äußeren Gleichheiten sind Definitionen. Aufgrund von Satz 29.3 ist $\ln{}'(1) = 1$. Dies bedeutet aufgrund der Definition des Differentialquotienten insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\,(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1\,.$$

Wir schreiben die Folgenglieder der linken Seite als $n \cdot \ln\,(1+\frac{1}{n})$ und wenden darauf die Exponentialfunktion an. Daraus ergibt sich unter Verwendung der Stetigkeit und der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion die Gleichungskette

$$\begin{aligned}
\exp\,1 &= \exp(\lim_{n\to\infty}(n \cdot \ln\,(1+\frac{1}{n}))) \\
&= \lim_{n\to\infty} \exp(n \cdot \ln\,(1+\frac{1}{n})) \\
&= \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \\
&= e.
\end{aligned}$$

□

SATZ 29.6. *Die Sinusfunktion*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto \sin\, z\,,$$

ist differenzierbar mit

$$\sin{}'(z) = \cos\, z$$

und die Kosinusfunktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto \cos\, z\,,$$

ist differenzierbar mit

$$\cos'(z) = -\sin z\ .$$

Beweis. Siehe Aufgabe 29.10. □

Die Zahl π

Die Zahl π ist der Flächeninhalt bzw. der halbe Kreisumfang eines Kreises mit Radius 1. Um darauf eine präzise Definition dieser Zahl aufzubauen müsste man zuerst die Maßtheorie (bzw. die Länge von „krummen Kurven") entwickeln. Auch die trigonometrischen Funktionen haben eine intuitive Interpretation am Einheitskreis, doch auch diese setzt das Konzept der Bogenlänge voraus. Ein alternativer Zugang ist es, die Zahl π über analytische Eigenschaften der durch ihre Potenzreihen definierten Funktionen Sinus und Kosinus zu definieren und dann erst nach und nach die Beziehung zum Kreis herzustellen.

Lemma 29.7. *Die Kosinusfunktion besitzt im reellen Intervall* $[0, 2]$ *genau eine Nullstelle.*

Beweis. Wir betrachten die Kosinusreihe

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\ .$$

Für $x = 0$ ist $\cos 0 = 1$. Für $x = 2$ kann man geschickt klammern und erhält

$$\begin{aligned}
\cos 2 &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \ldots \\
&= 1 - \frac{2^2}{2!}(1 - \frac{4}{3 \cdot 4}) - \frac{2^6}{6!}(1 - \frac{4}{7 \cdot 8}) - \ldots \\
&= 1 - 2(2/3) - \ldots \\
&\leq -1/3.
\end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also mindestens eine Nullstelle im angegebenen Intervall. Zum Beweis der Eindeutigkeit betrachten wir die Ableitung des Kosinus, diese ist nach Satz 29.6

$$\cos' x = -\sin x\ .$$

Es genügt zu zeigen, dass der Sinus im Intervall $]0, 2[$ positiv ist, denn dann ist das Negative davon stets negativ und der Kosinus ist dann nach Satz 28.5 im angegebenen Intervall streng fallend, so dass es nur eine Nullstelle gibt. Für $x \in]0, 2]$ gilt

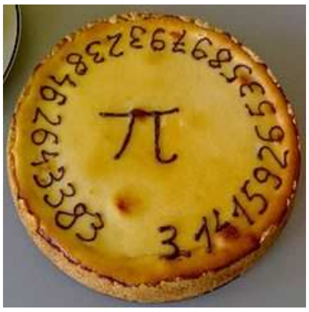
$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \\
&= x(1 - \frac{x^2}{3!}) + \frac{x^5}{5!}(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}) + \ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq x\left(1-\frac{4}{3!}\right)+\frac{x^5}{5!}\left(1-\frac{4}{6\cdot 7}\right)+\ldots \\ &\geq x/3 \\ &> 0. \end{aligned}$$

□

DEFINITION 29.8. Es sei r die eindeutig bestimmte reelle Nullstelle der Kosinusfunktion auf dem Intervall $[0, 2]$. Die *Kreiszahl* π ist definiert durch

$$\pi = 2r\,.$$



Eine rationale Approximation der Zahl π auf einem π-Pie.

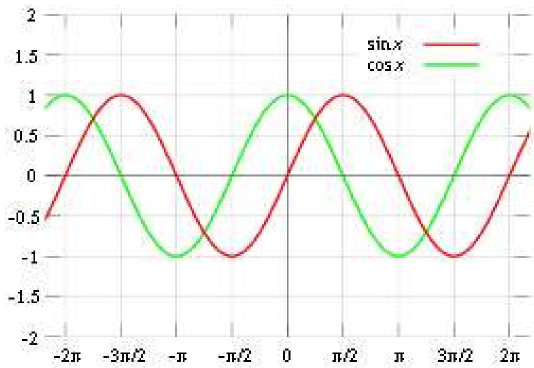
SATZ 29.9. *Die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion erfüllen in* $\mathbb{C}$ *folgende* Periodizitätseigenschaften*.*

(1) *Es ist* $\cos(z+2\pi)=\cos z$ *und* $\sin(z+2\pi)=\sin z$ *für alle* $z\in\mathbb{C}$.
(2) *Es ist* $\cos(z+\pi)=-\cos z$ *und* $\sin(z+\pi)=-\sin z$ *für alle* $z\in\mathbb{C}$.
(3) *Es ist* $\cos(z+\pi/2)=-\sin z$ *und* $\sin(z+\pi/2)=\cos z$ *für alle* $z\in\mathbb{C}$.
(4) *Es ist* $\cos 0=1$, $\cos\pi/2=0$, $\cos\pi=-1$, $\cos 3\pi/2=0$ *und* $\cos 2\pi=1$.
(5) *Es ist* $\sin 0=0$, $\sin\pi/2=1$, $\sin\pi=0$, $\sin 3\pi/2=-1$ *und* $\cos 2\pi=0$.

Beweis. Aufgrund der Kreisgleichung

$$(\cos z)^2+(\sin z)^2=1$$

ist $(\sin\frac{\pi}{2})^2=1$, also ist $\sin\frac{\pi}{2}=1$ wegen der Überlegung im Beweis zu Lemma 29.7. Daraus folgt mit den Additionstheoremen die in (3) angegebenen Beziehungen zwischen Sinus und Kosinus. Es genügt daher, die Aussagen für den Kosinus zu beweisen. Alle Aussagen folgen dann aus der Definition von π und aus (3). □



Korollar 29.10. *Die reelle Sinusfunktion induziert eine bijektive, streng wachsende Funktion*

$$[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1],$$

und die reelle Kosinusfunktion induziert eine bijektive streng fallende Funktion

$$[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1].$$

Beweis. Siehe Aufgabe 29.16. □

Polarkoordinaten für $\mathbb{C}$

Satz 29.11. *Die komplexe Exponentialfunktion besitzt die folgenden Eigenschaften.*

(1) *Es ist* $e^z = e^{z+2\pi i}$.
(2) *Es ist* $e^z = 1$ *genau dann, wenn* $z = 2\pi i n$ *für ein* $n \in \mathbb{Z}$ *ist.*
(3) *Es ist* $e^z = e^w$ *genau dann, wenn* $z - w = 2\pi i n$ *für ein* $n \in \mathbb{Z}$ *ist.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 25.11, aus Satz 29.11 und aus Satz 25.8. □

Insbesondere gilt also die berühmte Formel

$$e^{2\pi i} = 1\,.$$

Aus der *Eulerschen Gleichung*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

kann man ebenso die Gleichung $e^{\pi i} = -1$ bzw. $e^{\pi i} + 1 = 0$ ablesen, die die fünf wichtigsten Zahlen der Mathematik enthält.

Satz 29.12. *Zu jeder komplexen Zahl* $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, *gibt es eine eindeutige Darstellung*

$$z = r \cdot \exp(i\varphi) = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

mit $r \in \mathbb{R}_+$ *und mit* $\varphi \in [0, 2\pi[$.

Beweis. Wegen Satz 25.11 ist

$$|z| = |r||e^{i\varphi}| = |r| = r,$$

d.h. r ist als Betrag der komplexen Zahl z festgelegt. Wir können durch den Betrag teilen und können dann davon ausgehen, dass eine komplexe Zahl $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und mit $a^2 + b^2 = 1$ vorliegt. Es ist dann zu zeigen, dass es eine eindeutige Darstellung

$$z = a + bi = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

gibt. Bei $a = 1$ (bzw. -1) ist $b = 0$ und $\varphi = 0$ (bzw. $\varphi = \pi$) ist die einzige Lösung. Wir zeigen, dass es für ein gegebenes $a \in]-1, 1[$ stets genau zwei Möglichkeiten für φ mit $a = \cos\varphi$ gibt, und eine davon wird durch das Vorzeichen von b ausgeschlossen. Bei $b \geq 0$ gibt es aufgrund von Korollar 29.10 ein eindeutiges $\varphi \in [0, \pi]$ mit $a = \cos\varphi$. Für dieses gilt $b = \sin\varphi$ wegen $a^2 + b^2 = 1$ und $b \geq 0$. Bei $b < 0$ gibt es wiederum ein eindeutiges $\theta \in [0, \pi]$ mit $a = \cos\theta$. Wegen $\sin\theta \geq 0$ ist dies aber keine Lösung für beide Gleichungen. Stattdessen erfüllt $\varphi := 2\pi - \theta$ beide Gleichungen. □

Die in diesem Satz beschriebene Darstellung für eine komplexe Zahl heißen ihre *Polarkoordinaten*. Zu $z = x + iy$ heißt r der *Betrag* und φ das *Argument* (oder der *Winkel*) von z.

KOROLLAR 29.13. *Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gibt es eine komplexe Zahl w mit*

$$w^n = z\,.$$

Beweis. Bei $z = 0$ ist $w = 0$ eine Lösung, sei also $z \neq 0$. Nach Satz 29.12 gibt es eine Darstellung

$$z = re^{i\varphi}$$

mit $r \in \mathbb{R}_+$. Es sei $s = r^{1/n}$ die reelle n-te Wurzel von r, die nach Satz 21.9 existiert. Wir setzen

$$w = se^{\frac{i\varphi}{n}}\,.$$

Dann ist nach Satz 25.8

$$w^n = (se^{\frac{i\varphi}{n}})^n = s^n(e^{\frac{i\varphi}{n}})^n = re^{n\frac{i\varphi}{n}} = re^{i\varphi} = z.$$

□

Diese letzte Aussage besagt, dass jedes Polynom der Form $X^n - z$ in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle besitzt. Insofern handelt es sich dabei um eine Vorstufe für den Fundamentalsatz der Algebra, den wir das nächste Mal unter Verwendung dieser Aussage beweisen werden.

Abbildungsverzeichnis