Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Vorlesung 11

Rang von Matrizen

Definition 11.1. Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann nennt man die Dimension des von den Spalten erzeugten Unterraums von K^m den *(Spalten-)Rang* der Matrix, geschrieben

$$\operatorname{rang} M .$$

Lemma 11.2. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ beschrieben werde. Dann gilt

$$\operatorname{rang} \varphi = \operatorname{rang} M .$$

Beweis. Siehe Aufgabe 11.17. □

Zur Formulierung der nächsten Aussage führen wir den *Zeilenrang* einer $m \times n$-Matrix als die Dimension des von den Zeilen erzeugten Unterraumes von K^n ein.

Lemma 11.3. *Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann stimmt der Spaltenrang mit dem Zeilenrang überein. Der Rang ist gleich der in Satz 10.8 verwendeten Zahl r.*

Beweis. Bei elementaren Zeilenumformungen ändert sich der von den Zeilen erzeugte Raum nicht, und damit ändert sich auch nicht der Zeilenrang. Der Zeilenrang stimmt also mit dem Zeilenrang der in Satz 10.8 angegebenen Matrix in Stufenform überein. Diese hat den Zeilenrang r, da die ersten r Zeilen linear unabhängig sind und ansonsten nur Nullzeilen auftauchen. Sie hat aber auch den Spaltenrang r, da wiederum die ersten r Spalten (wenn man auch noch die Spalten vertauscht hat) linear unabhängig sind und die weiteren Spalten Linearkombinationen dieser r Spalten sind. Die Aufgabe 11.2 zeigt, dass sich bei elementaren Zeilenumformungen auch der Spaltenrang nicht ändert. □

Beide Ränge stimmen also überein, so dass wir im Folgenden nur noch vom *Rang einer Matrix* sprechen werden.

Korollar 11.4. *Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *M ist invertierbar.*
(2) *Der Rang von M ist n.*
(3) *Die Zeilen von M sind linear unabhängig.*
(4) *Die Spalten von M sind linear unabhängig.*

Beweis. Dies folgt aus Lemma 10.6 und aus Lemma 11.3. □

Determinanten

Definition 11.5. Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $n \times n$-Matrix über K. Zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei M_i diejenige $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die entsteht, wenn man in M die erste Spalte und die i-te Zeile weglässt. Dann definiert man rekursiv die *Determinante* von M durch

$$\det M = \begin{cases} a_{11} & \text{falls } n = 1\,, \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i & \text{für } n \geq 2\,. \end{cases}$$

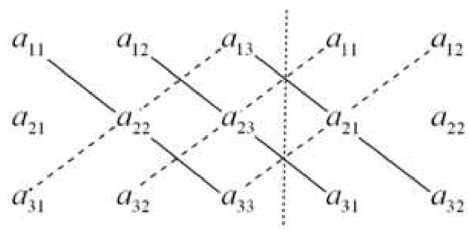
Die Determinante ist nur für quadratische Matrizen definiert. Für kleine n kann man die Determinante einfach ausrechnen.

Beispiel 11.6. Für eine 2×2-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb\,.$$



Als Merkregel für eine 3×3-Matrix verwendet man die *Regel von Sarrus*. Man wiederholt die erste Spalte als vierte Spalte und die zweite Spalte als fünfte Spalte. Die Produkte der durchgezogenen Diagonalen werden positiv genommen, die Produkte der gestrichelten Diagonalen negativ.

Beispiel 11.7. Für eine 3×3-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ist

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

LEMMA 11.8. *Für eine obere Dreiecksmatrix*

$$M = \begin{pmatrix} b_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & b_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

ist

$$\det M = b_1 b_2 \cdots b_{n-1} b_n \,.$$

Insbesondere ist für die Einheitsmatrix

$$\det E_n = 1 \,.$$

Beweis. Dies folgt mit einer einfachen Induktion direkt aus der Definition der Determinante. □

Determinantenfunktionen

Wir wollen zeigen, dass die oben rekursiv definierte Determinante eine „multilineare“ „alternierende“ Abbildung ist, wenn man die Identifizierung

$$\operatorname{Mat}_n(K) \cong (K^n)^n$$

vornimmt, bei der einer Matrix das n-Tupel der Zeilen der Matrix zugeordnet wird. Wir fassen also im Folgenden eine Matrix als ein Spaltentupel

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

auf, wobei die einzelnen Einträge v_i Zeilenvektoren der Länge n sind.

SATZ 11.9. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann ist die Determinante*

$$\operatorname{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\ M \longmapsto \det M,$$

multilinear. D.h., dass für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$, für $n-1$ Vektoren $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n \in K^n$ und für $u, w \in K^n$ die Gleichheit

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u+w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

und für $s \in K$ die Gleichheit

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ su \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = s \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

gilt.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Satz 11.10. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann besitzt die Determinante*

$$\mathrm{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\ M \longmapsto \det M,$$

folgende Eigenschaften.

(1) *Wenn in M zwei Zeilen übereinstimmen, so ist* $\det M = 0$*. D.h., dass die Determinante alternierend ist.*
(2) *Wenn man in M zwei Zeilen vertauscht, so ändert sich die Determinante mit dem Faktor -1.*

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

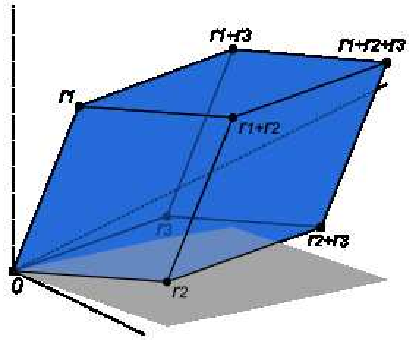
Satz 11.11. *Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) $\det M \neq 0$.
(2) *Die Zeilen von M sind linear unabhängig.*
(3) *M ist invertierbar.*
(4) $\operatorname{rang} M = n$.

Beweis. Die Beziehung zwischen Rang, Invertierbarkeit und linearer Unabhängigkeit wurde schon in Korollar 11.4 gezeigt. Seien die Zeilen linear abhängig. Wir können nach Zeilenvertauschen annehmen, dass $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} s_i v_i$ ist. Dann ist nach Satz 11.10

$$\det M = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ \sum_{i=1}^{n-1} s_i v_i \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n-1} s_i \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_i \end{pmatrix} = 0.$$

Seien nun die Zeilen linear unabhängig. Dann kann man durch Zeilenvertauschungen, Skalierung und Zeilenaddition die Matrix sukzessive zur Einheitsmatrix transformieren. Dabei ändert sich die Determinante stets durch einen von null verschiedenen Faktor. Da die Determinante der Einheitsmatrix 1 ist, muss auch die Determinate der Ausgangsmatrix $\neq 0$ sein. $\square$



Bemerkung 11.12. Bei $K = \mathbb{R}$ steht die Determinante in einer engen Beziehung zu Volumina von geometrischen Objekten. Wenn man im $\mathbb{R}^n$ Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ betrachtet, so spannen diese ein *Parallelotop* auf. Dieses ist definiert als

$$P := \{ s_1 v_1 + \ldots + s_n v_n | \, s_i \in [0, 1] \} \, .$$

Es besteht also aus allen Linearkombinationen der Vektoren, wobei aber die Skalare auf das Einheitsintervall beschränkt sind. Wenn die Vektoren linear unabhängig sind, so handelt es sich wirklich um einen „voluminösen" Körper, andernfalls liegt ein Objekt von niedrigerer Dimension vor. Es gilt nun die Beziehung

$$\text{vol } P = | \det (v_1, \ldots, v_n) | \, ,$$

d.h. das Volumen des Parallelotops ist der Betrag der Determinante derjenigen Matrix, die entsteht, wenn man die aufspannenden Vektoren hintereinander schreibt.

Der Determinantenmultiplikationssatz und Folgerungen

Wir besprechen weitere wichtige Sätze über Determinanten, die wir aber nicht beweisen werden. Die Beweise beruhen auf einer systematischeren Untersuchung der für die Determinante charakteristischen Eigenschaften, multilinear und alternierend zu sein. Durch diese beiden Eigenschaften zusammen mit der Bedingung, dass die Determinante der Einheitsmatrix gleich 1 ist, ist die Determiante nämlich schon eindeutig festgelegt.

Satz 11.13. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gilt für Matrizen $A, B \in \operatorname{Mat}_n(K)$ die Beziehung*

$$\det (A \circ B) = \det A \cdot \det B\,.$$

Definition 11.14. Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $m \times n$-Matrix über K. Dann nennt man die $n \times m$-Matrix

$$M^{tr} = (b_{ij})_{ij} \text{ mit } b_{ij} := a_{ji}$$

die *transponierte Matrix* zu M.

Die transponierte Matrix entsteht also, indem man die Rollen von Zeilen und Spalten vertauscht. Beispielsweise ist

$$\begin{pmatrix} t & n & o & e \\ r & s & n & r \\ a & p & i & t \end{pmatrix}^{tr} = \begin{pmatrix} t & r & a \\ n & s & p \\ o & n & i \\ e & r & t \end{pmatrix}.$$

Satz 11.15. *Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann ist*

$$\det M = \det M^{tr}\,.$$

Daraus folgt, dass man die Determinante auch berechnen kann, indem man „nach einer Zeile entwickelt“, wie die folgende Aussage zeigt.

Korollar 11.16. *Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $n \times n$-Matrix über K. Zu $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ sei M_{ij} diejenige Matrix, die entsteht, wenn man in M die i-te Zeile und die j-te Spalte weglässt. Dann ist (bei $n \geq 2$ für jedes feste i bzw. j)*

$$\det M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}.$$

Beweis. Für $j = 1$ ist dies die rekursive Definition der Determinante. Daraus folgt die Aussage für $i = 1$ aufgrund von Satz 11.15. Durch Spalten- und Zeilenvertauschung folgt die Aussage daraus allgemein, siehe Aufgabe 11.9. □

Die Determinante einer linearen Abbildung

Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung eines Vektorraumes der Dimension n in sich. Diese wird bezüglich einer Basis durch eine Matrix $M \in \mathrm{Mat}_n(K)$ beschrieben. Es liegt nahe, die Determinante dieser Matrix als Determinante der linearen Abbildung zu definieren, doch hat man hier das *Problem der Wohldefiniertheit*: die lineare Abbildung wird bezüglich einer anderen Basis durch eine „völlig" andere Matrix beschrieben. Allerdings besteht zwischen den zwei beschreibenden Matrizen M und N und der Basiswechselmatrix B aufgrund von Korollar 10.5 die Beziehung

$$N = BMB^{-1}\,.$$

Aufgrund des Determinantenmultiplikationssatzes ist daher

$$\det N \,=\, \det\left(BMB^{-1}\right) \,=\, (\det B)(\det M)(\det B)^{-1} \,=\, \det M,$$

sodass die folgende Definition in der Tat unabhängig von der Wahl einer Basis ist.

Definition 11.17. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich einer Basis durch die Matrix M beschrieben werde. Dann nennt man

$$\det \varphi := \det M$$

die *Determinante* der linearen Abbildung φ.

Abbildungsverzeichnis