

## Mathematik III

### Restklassenräume

LEMMA 1. *Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Dann ist die durch*

$$v \sim w, \text{ falls } v - w \in U,$$

*definierte Relation eine Äquivalenzrelation auf  $V$ .*

*Beweis.* Wir gehen die Bedingungen einer Äquivalenzrelation durch. Die Reflexivität folgt aus  $v - v = 0 \in U$ , die Symmetrie folgt aus  $w - v = -(v - w) \in U$ , die Transitivität ergibt sich so: Aus  $u - v \in U$  und  $v - w \in U$  folgt  $u - w = (u - v) + (v - w) \in U$ .  $\square$

Wir können auf diese Äquivalenzrelation die allgemeinen Ergebnisse aus der zweiten Vorlesung des ersten Teils anwenden und erhalten eine surjektive Quotientenabbildung (oder Identifizierungsabbildung oder kanonische Projektion)

$$q : V \longrightarrow V / \sim, v \longmapsto q(v) = [v].$$

Statt  $V / \sim$  werden wir  $V/U$  schreiben. Das Besondere an dieser Situation ist, dass diese Quotientenmenge selbst ein Vektorraum ist, und dass die kanonische Abbildung linear ist.

SATZ 2. *Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Es sei  $V/U$  die Menge der Äquivalenzklassen (die Quotientenmenge) zu der durch  $U$  definierten Äquivalenzrelation auf  $V$  und es sei  $q : V \rightarrow V/U, v \mapsto [v]$ , die kanonische Projektion. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte  $K$ -Vektorraumstruktur auf  $V/U$  derart, dass  $q$  eine  $K$ -lineare Abbildung ist.*

*Beweis.* Da die kanonische Projektion zu einer linearen Abbildung werden soll, muss die Addition durch

$$[v] + [w] = [v + w]$$

und die Skalarmultiplikation durch

$$\lambda[v] = [\lambda v]$$

gegeben sein. Insbesondere kann es also nur eine Vektorraumstruktur mit der gewünschten Eigenschaft geben, und wir müssen zeigen, dass durch diese Vorschriften wohldefinierte Operationen auf  $V/U$  definiert sind, die unabhängig von der Wahl der Repräsentanten sind. D.h. wir haben für  $[v] = [v']$  und

$[w] = [w']$  zu zeigen, dass  $[v + w] = [v' + w']$  ist. Nach Voraussetzung können wir  $v' = v + u$  und  $w' = w + u'$  mit  $u, u' \in U$  schreiben. Damit ist

$$v' + w' = v + w + u + u'$$

und dies ist wegen  $u + u' \in U$  äquivalent zu  $v + w$ . Zur Skalarmultiplikation sei wieder  $v' = v + u$  mit  $u \in U$ . Dann ist

$$\lambda v' = \lambda(v + u) = \lambda v + \lambda u,$$

und das ist äquivalent zu  $\lambda v$ . Aus der Wohldefiniertheit der Verknüpfung auf  $V/U$  und der Surjektivität der Abbildung folgt, dass eine Vektorraumstruktur vorliegt und dass die Abbildung linear ist.  $\square$

**DEFINITION 3.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Dann nennt man die Menge  $V/U$  der Äquivalenzklassen mit der in Lemma RKR.1 bewiesenen Vektorraumstruktur den *Restklassenraum* (oder *Quotientenraum*) von  $V$  modulo  $U$ .

**SATZ 4.** *Es sei  $K$  ein Körper und es seien  $V, Q$  und  $W$   $K$ -Vektorräume. Es sei  $\varphi : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung und  $\psi : V \rightarrow Q$  eine surjektive lineare Abbildung. Es sei vorausgesetzt, dass*

$$\text{kern } \psi \subseteq \text{kern } \varphi$$

*ist. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung*

$$\tilde{\varphi} : Q \longrightarrow W$$

*derart, dass  $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \psi$  ist. Mit anderen Worten: das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & Q \\ & \searrow & \downarrow \\ & & W \end{array}$$

*ist kommutativ.*

*Beweis.* Für jedes Element  $u \in Q$  gibt es mindestens ein  $v \in V$  mit  $\psi(v) = u$ . Wegen der Kommutativität muss

$$\tilde{\varphi}(u) = \varphi(v)$$

gelten. Das bedeutet, dass es maximal ein  $\tilde{\varphi}$  geben kann. Wir haben zu zeigen, dass durch diese Bedingung eine wohldefinierte Abbildung gegeben ist. Seien also  $v, v' \in V$  zwei Urbilder von  $u$ . Dann ist

$$v' - v \in \text{kern } \psi \subseteq \text{kern } \varphi$$

und daher ist  $\varphi(v) = \varphi(v')$ . Die Abbildung ist also wohldefiniert. Seien  $u, u' \in Q$  und seien  $v, v' \in V$  Urbilder davon. Dann ist  $v + v'$  ein Urbild von  $u + u'$  und daher ist

$$\tilde{\varphi}(u + u') = \varphi(v + v') = \varphi(v) + \varphi(v') = \tilde{\varphi}(u) + \tilde{\varphi}(u').$$

D.h.  $\varphi$  ist mit der Addition verträglich. Sei  $u \in Q$  mit einem Urbild  $v \in V$  und sei  $\lambda \in K$ . Dann ist  $\lambda v$  ein Urbild von  $\lambda u$  und daher ist

$$\tilde{\varphi}(\lambda u) = \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) = \lambda \tilde{\varphi}(u),$$

also ist  $\varphi$  auch mit der Skalarmultiplikation verträglich.  $\square$

Die im vorstehenden Satz konstruierte Abbildung  $\tilde{\varphi}$  heißt *induzierte lineare Abbildung* und entsprechend heißt der Satz auch *der Satz über die induzierte Abbildung*.

**KOROLLAR 5.** *Es sei  $K$  ein Körper und es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

*eine surjektive lineare Abbildung zwischen zwei  $K$ -Vektorräumen. Dann gibt es eine kanonische lineare Isomorphie*

$$\tilde{\varphi} : V / \text{kern } \varphi \longrightarrow W.$$

*Beweis.* Wir wenden Satz RKR.4 auf  $Q = V / \text{kern } \varphi$  und die kanonische Projektion  $q : V \rightarrow V / \text{kern } \varphi$  an. Dies induziert eine lineare Abbildung

$$\tilde{\varphi} : V / \text{kern } \varphi \longrightarrow W$$

mit  $\varphi = \tilde{\varphi} \circ q$ , die surjektiv ist. Sei  $[x] \in V / \text{kern } \varphi$  und  $[x] \in \text{kern } \tilde{\varphi}$ . Dann ist

$$\tilde{\varphi}([x]) = \varphi(x) = 0,$$

also  $x \in \text{kern } \varphi$ . Damit ist  $[x] = 0$  in  $V / \text{kern } \varphi$ , d.h. der Kern von  $\tilde{\varphi}$  ist trivial und nach Lemma 12.7 ist  $\tilde{\varphi}$  auch injektiv.  $\square$

**SATZ 6.** *Es sei  $K$  ein Körper und es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

*eine lineare Abbildung zwischen zwei  $K$ -Vektorräumen. Dann gibt es eine kanonische Faktorisierung*

$$V \xrightarrow{q} V / \text{kern } \varphi \xrightarrow{\theta} \text{bild } \varphi \xrightarrow{\iota} W,$$

*wobei  $q$  die kanonische Projektion,  $\theta$  eine Vektorraum-Isomorphismus und  $\iota$  die kanonische Inklusion des Bildraumes in  $W$  ist.*

*Beweis.* Dies folgt aus Korollar RKR.5, angewendet auf die surjektive Abbildung

$$V \longrightarrow \text{bild } \varphi.$$

$\square$

Diese Aussage wird häufig kurz und prägnant so formuliert:

$$\text{Bild} = \text{Urbild modulo Kern}.$$