Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Vorlesung 48

Die Taylor-Formel

Satz 48.1. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen,*

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine k-mal stetig differenzierbare Funktion, $P \in G$ ein Punkt und $\epsilon > 0$ derart, dass $U(P, \epsilon) \subseteq G$ ist. Dann gilt für alle $v \in U(P, \epsilon)$ die Beziehung

$$f(P + v) = \sum_{|r| \leq k} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r + R_k(v),$$

wobei

$$\lim_{v \to 0} \frac{|| R_k(v) ||}{|| v ||^k} = 0$$

ist.

Beweis. Nach Satz 47.5 gibt es zu jedem $v \in U(0, \epsilon)$ ein (von v abhängiges) $c \in [0, 1]$ mit

$$\begin{aligned} f(P + v) &= \sum_{|r| \leq k-1} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r + \sum_{|r| = k} \frac{1}{r!} D^r f(P + cv) \cdot v^r \\ &= \sum_{|r| \leq k} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r + \sum_{|r| = k} \frac{1}{r!} \left(D^r f(P + cv) - D^r f(P) \right) v^r . \end{aligned}$$

Die rechte Summe ist also die Abweichungsfunktion R_k, die wir abschätzen müssen. Wegen

$$\begin{aligned} || R_k(v) || &\leq \sum_{|r| = k} \frac{1}{r!} || D^r f(P + cv) - D^r f(P) || \cdot || v^r || \\ &= \sum_{|r| = k} \frac{1}{r!} || D^r f(P + cv) - D^r f(P) || \cdot | v_1^{r_1} | \cdots | v_n^{r_n} | \\ &\leq \sum_{|r| = k} \frac{1}{r!} || D^r f(P + cv) - D^r f(P) || \cdot || v ||^{r_1} \cdots || v ||^{r_n} \\ &= \sum_{|r| = k} \frac{1}{r!} || D^r f(P + cv) - D^r f(P) || \cdot || v ||^k \end{aligned}$$

ist

$$\frac{|| R_k(v) ||}{|| v ||^k} \leq \sum_{|r| = k} \frac{1}{r!} || D^r f(P + cv) - D^r f(P) || .$$

Da nach Voraussetzung die k-ten Richtungsableitungen stetig sind, existiert für jede einzelne Funktion $D^r f(P+cv) - D^r f(P)$ der Limes für $v \to 0$ und ist gleich 0. Daher gilt dies auch für die Summe rechts und damit auch für den Ausdruck links. $\square$

Hinreichende Kriterien für lokale Extrema

Wir kommen jetzt zu hinreichenden Kriterien für die Existenz von lokalen Extrema einer Funktion

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R},$$

die auf Eigenschaften der zweiten Richtungsableitungen, genauer der Hesse-Form, beruhen und die entsprechenden Kriterien in einer Variablen verallgemeinern. Zunächst brauchen wir ein Lemma, das beschreibt, wie die Definitheit der Hesse-Form vom Punkt abhängt.

Lemma 48.2. *Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge und*

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Es sei $P \in G$ ein Punkt, in dem die Hesse-Form $\operatorname{Hess}_P f$ positiv (negativ) definit sei. Dann gibt es eine offene Umgebung U, $P \in U \subseteq G$, derart, dass die Hesse-Form $\operatorname{Hess}_Q f$ in jedem Punkt $Q \in U$ positiv (negativ) definit ist.

Beweis. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, und sei $G(Q)$ die Gramsche Matrix zur Hesse-Form $\operatorname{Hess}_Q f$ im Punkt $Q \in G$ bzgl. dieser Basis. Aufgrund der Differenzierbarkeitsvoraussetzungen hängt $G(Q)$ stetig von Q ab. Daher hängen auch die Determinanten der quadratischen Untermatrizen von $G(Q)$ stetig von Q ab. Die Determinanten

$$D_k(P) = \det\left((G(P)_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}\right)$$

sind alle von 0 verschieden. Daher gibt es eine offene Umgebung U, $P \in U \subseteq G$, derart, dass für alle $Q \in U$ die Determinanten

$$D_k(Q) = \det\left((G(Q)_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}\right)$$

das gleiche Vorzeichen haben wie $D_k(P)$. Da diese Vorzeichen nach Korollar 47.2 über die Definitheit entscheiden, folgt die Behauptung. $\square$

Satz 48.3. *Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge und*

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Es sei $P \in G$ mit $(Df)_P = 0$. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Wenn $\operatorname{Hess}_P f$ negativ definit ist, so besitzt f ein isoliertes lokales Maximum in P.*

(2) *Wenn* $\operatorname{Hess}_P f$ *positiv definit ist, so besitzt* f *ein isoliertes lokales Minimum in* P.
(3) *Wenn* $\operatorname{Hess}_P f$ *indefinit ist, so besitzt* f *in* P *weder ein Minimum noch ein Maximum.*

Beweis. (1). Aufgrund von Lemma 48.2 gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass die Hesse-Form $\operatorname{Hess}_Q f$ negativ definit ist für alle $Q \in U(P, \delta)$. Für alle Vektoren $v \in V$, $v \in U(0, \delta)$, gibt es nach Satz 47.5 ein $c = c(v) \in [0,1]$ mit

$$f(P+v) \;=\; f(P) + \sum_{|r|=2} \frac{1}{r!} D^r f(P+cv) \cdot v^r \;=\; f(P) + \frac{1}{2} \operatorname{Hess}_{P+cv} f(v,v).$$

Da die Hesse-Form rechts negativ definit ist, steht rechts für $v \neq 0$ eine Zahl, die echt kleiner als $f(P)$ ist. Daher liegt ein isoliertes lokales Maximum vor. (2) wird wie (1) bewiesen oder durch betrachten von $-f$ darauf zurückgeführt. (3). Sei $\operatorname{Hess}_P f$ indefinit. Dann gibt es Vektoren v und w mit

$$\operatorname{Hess}_P f(v,v) > 0 \text{ und } \operatorname{Hess}_P f(w,w) < 0\,.$$

Wegen der stetigen Abhängigkeit der Hesse-Form gelten diese Abschätzungen auch für $\operatorname{Hess}_Q f$ für Q aus einer offenen Umgebung von P (mit den gleichen Vektoren v und w). Wir können durch Skalierung von v und w annehmen, dass $P + v$ und $P + w$ zu dieser Umgebung gehören. Wie im Beweis zu Teil (1) gilt daher (v und w sind nicht 0)

$$f(P+v) \;=\; f(P) + \frac{1}{2} \operatorname{Hess}_{P+cv} f(v,v) \;>\; f(P)$$

und

$$f(P+w) \;=\; f(P) + \frac{1}{2} \operatorname{Hess}_{P+dw} f(w,w) \;<\; f(P)$$

mit $c, d \in [0,1]$. Also kann in P kein Extremum vorliegen. □

Beispiel 48.4. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x + 3x^2 - 2xy - y^2 + y^3.$$

Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + 6x - 2y \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y} = -2x - 2y + 3y^2\,.$$

Zur Berechnung der kritischen Punkte dieser Funktion eliminieren wir x und erhalten die Bedingung

$$9y^2 - 8y + 1 \;=\; 0,$$

die zu

$$y \;=\; \frac{\pm\sqrt{7}}{9} + \frac{4}{9}$$

führt. Die kritischen Punkte sind also

$$P_1 = \Big(\frac{2\sqrt{7}-1}{54}, \frac{\sqrt{7}}{9} + \frac{4}{9}\Big) \text{ und } P_2 = \Big(\frac{-2\sqrt{7}-1}{54}, \frac{-\sqrt{7}}{9} + \frac{4}{9}\Big)\,.$$

Die Hesse-Form ist in einem Punkt $Q = (x, y)$ gleich

$$\operatorname{Hess}_Q f = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & -2+6y \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung des Typs ziehen wir Satz 47.1 heran, wobei der erste Minor, also 6, natürlich positiv ist. Die Determinante der Hesse-Matrix ist

$$-16 + 36y,$$

was genau bei $y > \frac{4}{9}$ positiv ist. Dies ist im Punkt P_1 der Fall, aber nicht im Punkt P_2. Daher ist die Hesse-Matrix im Punkt P_1 nach Satz 47.1 positiv definit und somit besitzt die Funktion f im Punkt P_1 nach Satz 48.3 ein lokales Minimum, das zugleich ein globales Minimum ist. In P_2 ist die Determinante negativ, so dass dort die Hesse-Form indefinit ist und somit, wiederum nach Satz 48.3, kein Extremum vorliegen kann.

Der Banachsche Fixpunktsatz

In den folgenden Vorlesungen werden wir verstärkt topologische Hilfsmittel verwenden, insbesondere werden wir mit allgemeinen vollständigen Räumen (einschließlich Funktionenräumen) arbeiten.

Definition 48.5. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum M heißt *Cauchy-Folge*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Beziehung

$$d(x_n, x_m) \leq \epsilon$$

gilt.

Definition 48.6. Ein metrischer Raum M heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in M konvergiert.

Definition 48.7. Es sei

$$f : L \longrightarrow M,\ x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M. Dann heißt f *stark kontrahierend*, wenn es eine nichtnegative reelle Zahl $c < 1$ gibt mit

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

für alle $x, y \in L$.

Die Zahl c nennt man einen *Kontraktionsfaktor*.

Satz 48.8. *Es sei M ein vollständiger metrischer Raum und*

$$f : M \longrightarrow M$$

eine stark kontrahierende Abbildung. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt.

Beweis. Es sei $c \in \mathbb{R}$, $0 \leq c < 1$, ein Kontraktionsfaktor, d.h. es gelte

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

für alle $x, y \in M$. Wenn $x, y \in M$ Fixpunkte sind, so folgt aus

$$d(x, y) \;=\; d(f(x), f(y)) \;<\; c \cdot d(x, y)$$

sofort $d(x, y) = 0$ und somit $x = y$, es kann also maximal einen Fixpunkt geben. Sei nun $x \in M$ ein beliebiger Punkt. Wir betrachten die durch

$$x_0 = x \text{ und } x_n := f^n(x) := f(x_{n-1})$$

rekursiv definierte Folge in M. Wir setzen $a = d(f(x), x)$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$d(f^{n+1}(x), f^n(x)) \;\leq\; c \cdot d(f^n(x), f^{n-1}(x)) \;\leq\; c^n \cdot d(f(x), x) \;=\; c^n a.$$

Daher gilt aufgrund der Dreiecksungleichung und der geometrischen Reihe für $n \geq m$ die Beziehung

$$\begin{aligned} d(f^n(x), f^m(x)) &\leq d(f^n(x), f^{n-1}(x)) + d(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x)) + \ldots \\ &\qquad + d(f^{m+1}(x), f^m(x)) \\ &\leq a(c^{n-1} + c^{n-2} + \ldots + c^{m+1} + c^m) \\ &= ac^m(c^{n-m-1} + c^{n-m-2} + \ldots + c^2 + c^1 + 1) \leq c^m a \frac{1}{1-c}. \end{aligned}$$

Zu einem gegebenen $\epsilon > 0$ wählt man n_0 mit $c^m a \frac{1}{1-c} \leq \epsilon$. Dies zeigt, dass eine Cauchy-Folge vorliegt, die aufgrund der Vollständigkeit gegen ein $y \in M$ konvergiert. Wir zeigen, dass dieses y ein Fixpunkt ist.Die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $f(y)$, da eine kontrahierende Abbildung stetig ist. Andererseits stimmt diese Bildfolge mit der Ausgangsfolge bis auf die Indizierung überein, so dass der Grenzwert y sein muss. $\square$