Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Arbeitsblatt 16

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 16.1. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $\lambda \in K$. Zeige folgende Aussagen.

(1) Der Eigenraum
$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)$$
ist ein Untervektorraum von V.

(2) λ ist genau dann ein Eigenwert zu φ, wenn der Eigenraum $\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)$ nicht der Nullraum ist.

(3) Ein Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, ist genau dann ein Eigenvektor zu λ, wenn $v \in \operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)$ ist.

AUFGABE 16.2. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass

$$\operatorname{kern} \varphi = \operatorname{Eig}_0(\varphi)$$

gilt.

AUFGABE 16.3. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und seien $\lambda_1 \neq \lambda_2$ Elemente in K. Zeige, dass

$$\operatorname{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \cap \operatorname{Eig}_{\lambda_2}(\varphi) = 0\,.$$

ist.

AUFGABE 16.4. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass es dann nur endlich viele Eigenwerte zu φ gibt.

Aufgabe 16.5. Zeige, dass jede Matrix

$$M \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$$

mindestens einen Eigenwert besitzt.

Aufgabe 16.6. Es sei

$$M \in \mathrm{Mat}_n(K)$$

eine Matrix mit n verschiedenen Eigenwerten. Zeige, dass die Determinante von M das Produkt der Eigenwerte ist.

Zu einem Endomorphismus φ (bzw. einer Matrix M) bezeichnet man mit φ^n (bzw. M^n) die n-fache Hintereinanderschaltung (bzw. Verknüpfung) mit sich selbst. Man spricht dann auch von n-ten *Potenzen*.

Aufgabe 16.7. Berechne zur Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

die Potenzen

$$M^i, i = 1, \ldots, 4.$$

Aufgabe 16.8. Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

derart, dass φ keine Eigenwerte besitzt, dass aber eine gewisse Potenz φ^n, $n \geq 1$,Eigenwerte besitzt.

Aufgabe 16.9. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Zeige, dass die ersten $n^2 + 1$ Potenzen

$$M^i, i = 0, \ldots, n^2,$$

linear abhängig in $\mathrm{Mat}_n(K)$ sind.

Die nächsten Aufgaben verwenden die beiden folgenden Begriffe:

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

heißt *nilpotent*, wenn es eine natürliche Zahl n gibt derart, dass die n-te Hintereinanderschaltung

$$\varphi^n = 0$$

ist.

Eine quadratische Matrix M heißt *nilpotent*, wenn es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass das n-te Matrixprodukt

$$M^n = \underbrace{M \circ \cdots \circ M}_{n-\text{mal}} = 0$$

ist.

Aufgabe 16.10. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine nilpotente lineare Abbildung. Zeige, dass $\varphi^n = 0$ ist, wobei n die Dimension von V bezeichnet.

Aufgabe 16.11. Es sei K ein Körper und es sei V ein K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine nilpotente lineare Abbildung. Zeige, dass 0 der einzige Eigenwert von φ ist.

Aufgabe 16.12. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine nilpotente lineare Abbildung. Was ist die Determinante von φ?

Die nächsten Aufgaben verwenden die folgende Definition.

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zu $a \in K$ heißt die lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow V,\, v \longmapsto av,$$

die *Streckung* (oder *Homothetie*) zum *Streckungsfaktor* a.

Aufgabe 16.13. Was ist die Determinante einer Streckung?

Aufgabe 16.14. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Sei $\lambda \in K$ und sei

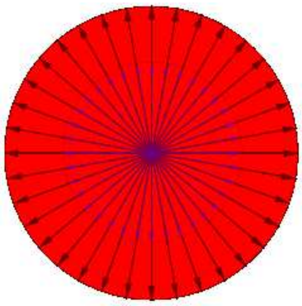
$$U = \operatorname{Eig}_{\lambda}(\varphi)$$

der zugehörige Eigenraum. Zeige, dass sich φ zu einer linearen Abbildung

$$\varphi|_U : U \longrightarrow U,\, v \longmapsto \varphi(v),$$

einschränken lässt, und dass diese Abbildung die Streckung um den Streckungsfaktor λ ist.

Aufgaben zum Abgeben



Aufgabe 16.15. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann eine Streckung ist, wenn jeder Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, ein Eigenvektor von φ ist.

Aufgabe 16.16. (3 Punkte)

Es sei M eine obere Dreiecksmatrix, bei der alle Diagonalelemente null seien. M hat also die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeige, dass M nilpotent ist.

Aufgabe 16.17. (3 Punkte)

Betrachte die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass M als reelle Matrix keine Eigenwerte besitzt. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume von M als komplexer Matrix.

Aufgabe 16.18. (6 Punkte)

Betrachte die reellen Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}).$$

Man charakterisiere in Abhängigkeit von a, b, c, d, wann eine solche Matrix

(1) zwei verschiedene Eigenwerte,
(2) einen Eigenwert mit einem zweidimensionalen Eigenraum,
(3) einen Eigenwert mit einem eindimensionalen Eigenraum,
(4) keinen Eigenwert

besitzt.

Aufgabe 16.19. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung mit

$$\varphi^n = \mathrm{Id}_V$$

für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$.[1] Zeige, dass jeder Eigenwert λ von φ die Eigenschaft $\lambda^n = 1$ besitzt.

Aufgabe 16.20. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von φ und v ein zugehöriger Eigenvektor. Zeige, dass es eine Basis $v, w_2, \ldots, w_n$ von V gibt mit

$$\varphi(w_j) \in \langle w_i,\, i = 2, \ldots, n \rangle$$

für alle $j = 2, \ldots, n$.

Aufgabe 16.21. (5 Punkte)

Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und es sei

$$\varphi^* : \mathrm{Hom}_K(V, K) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V, K),\ f \longmapsto f \circ \varphi,$$

die dazu duale Abbildung. Zeige, dass jeder Eigenwert von φ auch ein Eigenwert von φ^* ist.

[1] Der Wert $n = 0$ ist hier erlaubt, aber aussagelos.

Aufgabe zum Hochladen

Aufgabe 16.22. (bis 10 Punkte)

Man lege eine Serie von Skizzen (hochladbare Computergraphik) an, die die typische Wirkungsweise (bspw. auf gewissen Figuren) von linearen Abbildungen der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ in sich veranschaulicht. Insbesondere sollen auch Eigenräume illustriert werden.

Information zur Testklausur

Am 12. Dezember 2009 findet eine Testklausur statt, deren Ergebnis in die Übungspunktzahl (mit dem Faktor 2) eingeht.

Stoff ist der bisherige Stoff der Vorlesung.

Die Klausur findet in der Reithalle 66, E33 und E34 um 10:00 Uhr statt. Kommen Sie etwas früher.

Raumaufteilung:

Nachname A-L : E33

Nachname M-Z : E34.

Bringen Sie Ihren Studentenausweis mit. Die Sitzordnung ist alphabetisch, jede zweite Reihe wird freigelassen, den Anweisungen des Aufsichtspersonals ist zu folgen.

In der Klausur sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt. Es gibt 15 Aufgaben im Gesamtwert von 64 Punkten, bei 32 Punkten gibt es eine Eins, 16 Punkte gelten als bestanden. Die ersten zehn Minuten dienen der Orientierung, in ihnen darf noch nicht geschrieben werden. Danach haben Sie zwei Stunden Bearbeitungszeit. Bei jeder Aufgabe gilt die Sockelregel, die besagt, dass eine (Teil)-Aufgabe nur dann in die Wertung eingeht, wenn sie zumindest zur Hälfte richtig beantwortet wurde. In der ersten Aufgabe werden ein paar Definitionen abgefragt. Alle Antworten sind zu begründen. Es gibt auch einige Rechenaufgaben, die allerdings nicht geschönt sind. Rechenfehler (=Denkfehler) führen zu spürbarem Punktabzug.

Bringen Sie gute Laune und Stifte mit (kein Bleistift). Wenn Sie wollen auch Süßigkeiten, (nichtelektrische) Kuscheltiere und andere Stärkungsmittel. Alles andere hat auf dem Tisch nichts verloren, Taschen sind zu schließen, Mobiltelefone auszuschalten. Papier wird gestellt. Täuschungsversuche führen zur sofortigen Disqualifikation.

Die Klausur wird Samstagabend mit den Lösungen veröffentlicht. Die Rückgabe erfolgt in den Übungsgruppen am Montag bzw. Dienstag.

Abbildungsverzeichnis