Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 5

Aufgabe 5.1. Axiomatisiere den Körperbegriff in einer geeigneten Sprache erster Stufe.

Eine Menge K heißt ein *Körper*, wenn es zwei Verknüpfungen (genannt Addition und Multiplikation)

$$+ : K \times K \longrightarrow K \text{ und } \cdot : K \times K \longrightarrow K$$

und zwei verschiedene Elemente $0, 1 \in K$ gibt, die die folgenden Eigenschaften erfüllen.

(1) Axiome der Addition
   (a) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a+b)+c = a+(b+c)$.
   (b) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a + b = b + a$.
   (c) 0 ist das neutrale Element der Addition, d.h. für alle $a \in K$ ist $a + 0 = a$.
   (d) Existenz des Negativen: Zu jedem $a \in K$ gibt es ein Element $b \in K$ mit $a + b = 0$.
(2) Axiome der Multiplikation
   (a) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
   (b) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$.
   (c) 1 ist das neutrale Element der Multiplikation, d.h. für alle $a \in K$ ist $a \cdot 1 = a$.
   (d) Existenz des Inversen: Zu jedem $a \in K$ mit $a \neq 0$ gibt es ein Element $c \in K$ mit $a \cdot c = 1$.
(3) Distributivgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Aufgabe 5.2. Axiomatisiere den Begriff eines angeordneten Körpers in einer geeigneten Sprache erster Stufe.

Ein Körper K heißt *angeordnet*, wenn es eine totale Ordnung „$\geq$“ auf K gibt, die die beiden Eigenschaften

(1) Aus $a \geq b$ folgt $a + c \geq b + c$ (für beliebige $a, b, c \in K$)
(2) Aus $a \geq 0$ und $b \geq 0$ folgt $ab \geq 0$ (für beliebige $a, b \in K$)

erfüllt.

AUFGABE 5.3. Zeige, dass die folgenden prädikatenlogischen Ausdrücke allgemeingültig sind.

(1)
$$\forall x \forall y \forall z((x = y \wedge y = z) \to x = z)\,.$$

(2)
$$(\forall x P x) \to P y$$
(wobei P ein einstelliges Relationssymbol ist).

(3)
$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \to p\,,$$
wobei p_1, p_2, p_3 die Gruppenaxiome sind und
$$p := \forall z(\forall x(zx = x \wedge xz = x) \to z = e)$$
ist.

AUFGABE 5.4. Es sei Γ eine Ausdrucksmenge und p ein Ausdruck in einer Sprache erster Stufe. Zeige, dass $\Gamma \vDash p$ genau dann gilt, wenn $\Gamma \cup \{\neg p\}$ nicht erfüllbar ist.

Bei den beiden folgenden Aufgaben soll mit den Peano-Axiomen der zweiten Stufe argumentiert werden.

AUFGABE 5.5. Zeige ausgehend von den Peano-Axiomen, dass jedes Element $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, einen Vorgänger besitzt.

AUFGABE 5.6. Man gebe Beispiele $(M, 0, ')$ für Mengen mit einem ausgezeichneten Element $0 \in M$ und einer Abbildung $' : M \to M$ an, die je zwei der Peanoaxiome erfüllen, aber nicht das dritte.