

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 17

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 17.1. Betrachte den Monoidhomomorphismus

$$\mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}, e_1 \longmapsto 1, e_2 \longmapsto -1.$$

Beschreibe die zugehörige Abbildung zwischen den Monoidringen (für einen Körper K) und den zugehörigen K -Spektren.

AUFGABE 17.2. Seien $M \subseteq N$ kommutative Monoide. Zeige, dass durch

$$\tilde{M} = \{n \in N \mid \text{es gibt } k \in \mathbb{N}_+ \text{ mit } kn \in M\}$$

ein Untermonoid von N gegeben ist, das M umfasst.

AUFGABE 17.3. Wir betrachten die kommutativen Monoide $M = \mathbb{N}^r$ und $N = \mathbb{N}^s$. Zeige, dass ein Monoidhomomorphismus von M nach N eindeutig durch eine Matrix (mit r Spalten und s Zeilen) mit Einträgen aus \mathbb{N} bestimmt ist.

Wie sieht die zugehörige Spektrumsabbildung aus?

AUFGABE 17.4. Sei M ein kommutatives Monoid. Zeige, dass die zugehörige Differenzgruppe $\Gamma = \Gamma(M)$ eine kommutative Gruppe ist, und dass sie folgende universelle Eigenschaft besitzt: Zu jedem Monoidhomomorphismus

$$\varphi: M \longrightarrow G$$

in eine Gruppe G gibt es einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus

$$\tilde{\varphi}: \Gamma \longrightarrow G,$$

der φ fortsetzt.

AUFGABE 17.5. Sei M ein kommutatives Monoid mit zugehöriger Differenzgruppe $\Gamma = \Gamma(M)$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

- (1) M ist ein Monoid mit Kürzungsregel.
- (2) Die kanonische Abbildung $M \rightarrow \Gamma(M)$ ist injektiv.
- (3) M lässt sich realisieren als Untermonoid einer Gruppe.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 17.6. (6 Punkte)

Seien $M \subseteq N$ endlich erzeugte kommutative Monoide. Zeige, dass für einen Körper K der Ringhomomorphismus $K[M] \subseteq K[N]$ genau dann endlich ist, wenn es zu jedem $n \in N$ ein $k \in \mathbb{N}_+$ gibt mit $kn \in M$.

AUFGABE 17.7. (4 Punkte)

Sei $M = (\mathbb{Q}, +)$ die additive Gruppe der rationalen Zahlen. Bestimme $\mathbb{Q} - \text{Spec}(\mathbb{Q}[M])$. Wie sieht es aus, wenn man \mathbb{Q} durch \mathbb{R} ersetzt?

AUFGABE 17.8. (4 Punkte)

Es sei $\varphi: M \rightarrow N$ ein Homomorphismus von kommutativen Monoiden. Zeige, dass die Menge aller Punkte aus $K - \text{Spec} K[N]$, die unter der Spektrumsabbildung auf den Einspunkt $1 \in K - \text{Spec}(K[M])$ (das ist der Punkt, der der konstanten Abbildung $M \mapsto 1$ entspricht) abgebildet werden, selbst die Struktur eines K -Spektrums eines geeigneten Monoids besitzt.

AUFGABE 17.9. (4 Punkte)

Wir betrachten Monoide der Form $M = (\mathbb{Z}/(m), +)$. Beschreibe $K - \text{Spec}(K[M])$ allgemein sowie für die Körper $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/(5)$. Finde die idempotenten Elemente von $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/(3)]$.

AUFGABE 17.10. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und G eine Gruppe. Dann können wir den Monoidring $K[G]$ betrachten. Sei nun weiter M ein $K[G]$ -Modul. Zeige, dass

- (1) M nichts anderes ist als ein K -Vektorraum V zusammen mit einem Gruppenhomomorphismus $\rho: G \rightarrow \text{Aut}_K(V)$.
- (2) ein $K[G]$ -Modulhomomorphismus $\varphi: M \rightarrow M$ eine K -lineare Abbildung ist, für die zusätzlich $\varphi \circ \rho(g) = \rho(g) \circ \varphi$ für alle $g \in G$ gilt.

Bemerkung: ρ heißt dann eine *Darstellung* von G . Solche Darstellungen sind oft einfacher zu handhaben als G und man kann mit Hilfe von ρ oft hilfreiche Erkenntnisse über G selbst gewinnen.