

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 10

AUFGABE 10.1. Zeige, dass die folgenden Teilmengen T der natürlichen Zahlen arithmetisch repräsentierbar sind.

- (1) Eine konkrete endliche Menge $\{n_1, \dots, n_k\}$.
- (2) Die Menge aller Vielfachen von 5.
- (3) Die Menge der Primzahlen.
- (4) Die Menge der Quadratzahlen.
- (5) Die Menge der Zahlen, in deren Primfaktorzerlegung jeder Exponent maximal 1 ist.

AUFGABE 10.2. Zeige, dass die folgenden Abbildungen $\varphi : \mathbb{N}^r \rightarrow \mathbb{N}$ arithmetisch repräsentierbar sind.

- (1) Die Addition

$$\mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}, (x, y) \longmapsto x + y.$$

- (2) Die Multiplikation

$$\mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}, (x, y) \longmapsto x \cdot y.$$

- (3) Die eingeschränkte Subtraktion

$$\mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}, (x, y) \longmapsto \max(x - y, 0),$$

die bei $y > x$ den Wert 0 besitzt.

- (4) Die Restfunktion

$$\mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}, (n, t) \longmapsto r(n, t),$$

die den Rest (zwischen 0 und $t-1$) bei Division von n durch t angibt.

AUFGABE 10.3. Es sei

$$\varphi : \mathbb{N}^r \longrightarrow \mathbb{N}^s$$

eine Abbildung. Zeige, dass φ genau dann arithmetisch repräsentierbar ist, wenn sämtliche Komponentenfunktionen φ_i , $1 \leq i \leq s$, arithmetisch repräsentierbar sind.

AUFGABE 10.4. Zeige, dass die β -Funktion arithmetisch repräsentierbar ist.