

## Einführung in die mathematische Logik

### Arbeitsblatt 10

AUFGABE 10.1. Zeige, dass die folgenden Teilmengen  $T$  der natürlichen Zahlen arithmetisch repräsentierbar sind.

- (1) Eine konkrete endliche Menge  $\{n_1, \dots, n_k\}$ .
- (2) Die Menge aller Vielfachen von 5.
- (3) Die Menge der Primzahlen.
- (4) Die Menge der Quadratzahlen.
- (5) Die Menge der Zahlen, in deren Primfaktorzerlegung jeder Exponent maximal 1 ist.

AUFGABE 10.2. Zeige, dass die folgenden Abbildungen  $\varphi : \mathbb{N}^r \rightarrow \mathbb{N}$  arithmetisch repräsentierbar sind.

- (1) Die Addition

$$\mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}, (x, y) \longmapsto x + y.$$

- (2) Die Multiplikation

$$\mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}, (x, y) \longmapsto x \cdot y.$$

- (3) Die eingeschränkte Subtraktion

$$\mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}, (x, y) \longmapsto \max(x - y, 0),$$

die bei  $y > x$  den Wert 0 besitzt.

- (4) Die Restfunktion

$$\mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}, (n, t) \longmapsto r(n, t),$$

die den Rest (zwischen 0 und  $t-1$ ) bei Division von  $n$  durch  $t$  angibt.

AUFGABE 10.3. Es sei

$$\varphi : \mathbb{N}^r \longrightarrow \mathbb{N}^s$$

eine Abbildung. Zeige, dass  $\varphi$  genau dann arithmetisch repräsentierbar ist, wenn sämtliche Komponentenfunktionen  $\varphi_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , arithmetisch repräsentierbar sind.

AUFGABE 10.4. Zeige, dass die  $\beta$ -Funktion arithmetisch repräsentierbar ist.