Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 2

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 2.1. Es sei G eine Gruppe und M eine Menge. Es sei $\operatorname{Perm}(M)$ die Gruppe der Permutationen auf M. Zeige folgende Aussagen.

(1) Wenn G auf M operiert, so ist die Abbildung
$$G \longrightarrow \operatorname{Perm}(M),\ g \longmapsto (x \mapsto gx),$$
ein Gruppenhomomorphismus.

(2) Wenn umgekehrt ein Gruppenhomomorphismus
$$\varphi\colon\ G \longrightarrow \operatorname{Perm}(M),$$
vorliegt, so wird durch
$$G \times M \longrightarrow M,\ (g,x) \longmapsto (\varphi(g))(x),$$
eine Gruppenoperation von G auf M definiert.

Aufgabe 2.2. Zeige, dass die G-Äquivalenz bei einer Gruppenoperation in der Tat eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 2.3. Bestimme für die Operation der Kongruenzen die Isotropiegruppen zu jedem Dreieck $\triangle = (P_1, P_2, P_3) \in \mathbb{R}^6$.

Aufgabe 2.4. Sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachte die Gruppenoperation der n-ten Einheitswurzeln durch Multiplikation auf $\mathbb{C}$. Bestimme die Bahnen und die Isotropiegruppen dieser Operation. Kann man die Quotientenabbildung durch eine polynomiale Funktion realisieren?

Aufgabe 2.5. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $G = \operatorname{GL}(V)$ die allgemeine lineare Gruppe mit ihrer natürlichen Operation auf V. Zeige, dass diese Gruppenoperation transitiv ist. Wie sieht es aus, wenn man $\operatorname{SL}(V)$ betrachtet?

Aufgabe 2.6. Es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $G = \mathrm{GL}(V)$ die allgemeine lineare Gruppe zusammen mit ihrer natürlichen Operation auf der Menge

$$M = \{(v_1, \ldots , v_n) \in V^n | \text{ Basis}\} \ .$$

Zeige, dass diese Operation transitiv ist. Wie sieht es auf ganz V^n aus?

Aufgabe 2.7. Zeige, dass die Isotropiegruppe bei einer Gruppenoperation kein Normalteiler sein muss.

Aufgabe 2.8. Diskutiere Links- und Rechtsoperationen.

Aufgabe 2.9. Es sei X ein topologischer Raum und

$$R = C(X, \mathbb{R}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} | \, f \text{ stetige Abbildung}\} \, .$$

Zeige, dass R ein kommutativer Ring ist. Man gebe auch ein Beispiel an, das zeigt, dass R im Allgemeinen nicht nullteilerfrei ist.

Aufgabe 2.10. Es seien X und Y topologische Räume und

$$\varphi \colon \, X \longrightarrow Y$$

eine stetige Abbildung. Zeige, dass dies einen Ringhomomorphismus

$$C(Y, \mathbb{R}) \longrightarrow C(X, \mathbb{R}), \ f \longmapsto f \circ \varphi,$$

induziert.

Gemäß Aufgabe 2.1 ergibt eine Gruppenoperation für jedes $g \in G$ eine Bijektion $x \mapsto gx$ auf M. Wenn M zusätzliche Strukturen besitzt, so verlangt man häufig, dass diese Bijektionen diese Strukturen respektieren, also beispielsweise linear oder stetig sind. Man spricht dann von einer linearen oder von einer stetigen Operation oder sagt, dass die Gruppe als Gruppe von Automorphismen oder als Gruppe von Homöomorphismen operiert.

Aufgabe 2.11. Es sei X ein topologischer Raum, auf dem eine Gruppe G operiere, wobei zu jedem $g \in G$ die Abbildung $x \mapsto gx$ stetig sei. Zeige, dass dadurch eine Operation (von rechts) von G auf dem Ring der stetigen Funktionen $C(X, \mathbb{R})$ als Gruppe von Ringautomorphismen gegeben ist.

Aufgabe 2.12. Wir betrachten die geordneten Dreiecke $\triangle = (P_1, \, P_2, \, P_3)$ als Punkte im $\mathbb{R}^6$. Definiere eine Gruppenoperation der S_3 auf dem $\mathbb{R}^6$ derart, dass die Bahnen den ungeordneten Dreiecken (also den Dreiecken ohne Nummerierung) entsprechen. Bestimme die Isotropiegruppen zu jedem Dreieck.

Aufgabe 2.13. Zeige, dass zwei Permutationen $\sigma, \tau \in S_n$ genau dann konjugiert sind, wenn ihre Zykeldarstellung den gleichen Typ haben, d.h. wenn die Anzahl der Zykel und deren Längen übereinstimmen.

Aufgabe 2.14. Betrachte zur symmetrischen Gruppe S_n die Operation durch Konjugation. Bestimme die Bahnen und die Isotropiegruppen für $n \leq 5$.

Aufgabe 2.15. Es sei GL_n

(K) die Menge der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über einem Körper K. Zeige, dass für zueinander

konjugierte Matrizen M und N aus GL_n

(K) die folgenden Eigenschaften bzw. Invarianten übereinstimmen: Die Determinante, die Eigenwerte, die Dimension der Eigenräume zu einem Eigenwert, die Diagonalisierbarkeit, die Trigonalisierbarkeit.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 2.16. (4 Punkte)

Wir betrachten die geordneten Dreiecke $\triangle = (P_1, P_2, P_3)$ als Punkte im $\mathbb{R}^6$. Betrachte die Gruppenoperation der S_3 auf dem $\mathbb{R}^6$ durch Umnummerierung der Eckpunkte. Man gebe sechs reelle Polynome $(F_1, \ldots, F_6)$ an derart, dass die Fasern der dadurch definierten Gesamtabbildung

$$F\colon \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^6$$

genau die Bahnen der Operation sind.

Aufgabe 2.17. (3 Punkte)

Zeige, dass die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +)$ auf der Menge der komplexen Zahlen durch

$$\mathbb{R} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ (t, z) \longmapsto e^{2\pi i t} z,$$

operiert. Bestimme die Bahnen, die Isotropiegruppen und die Quotientenabbildung dieser Operation.

Aufgabe 2.18. (3 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Es gibt eine stetige Funtion
$$g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{C}$$
mit $f(z) = g(|z|)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
(2) Für alle n-ten Einheitswurzeln $\zeta \in \mathbb{C}$ (alle $n \in \mathbb{N}$) ist $f(\zeta z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
(3) Für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = 1$ ist $f(wz) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2.19. (4 Punkte)

Wir betrachten die Menge der quadratischen Polynome
$$M = \left\{ aX^2 + bX + c |\, a,b,c \in K,\, a \neq 0 \right\}$$
über einem Körper K, und es sei G die Menge der Transformationen vom Typ $X \mapsto \alpha X + \beta$ mit $\alpha \neq 0$.

a) Zeige, dass G auf M in natürlicher Weise operiert.

b) Zeige, dass G auf K durch Multiplikation mit α^2 operiert.

c) Zeige, dass die *Diskriminante*, also der Ausdruck $b^2 - 4ac$, der einem quadratischen Polynom zugeordnet ist, G-verträglich bezüglich dieser beiden Operationen ist.

Aufgabe 2.20. (4 Punkte)

Bestimme die Konjugationsklassen der (eigentlichen) Würfelgruppe.