Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 21

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 21.1. Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper Q. Zeige, dass es keinen echten Zwischenring zwischen R und Q gibt.

Aufgabe 21.2. Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper Q. Charakterisiere die endlich erzeugten R-Untermoduln von Q. Auf welche Form kann man ein Erzeugendensystem bringen?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 21.3. (4 Punkte)

Beweise für einen diskreten Bewertungsring die Eigenschaften der Ordnung, die in Lemma 21.5 formuliert sind.

Aufgabe 21.4. (3 Punkte)

Sei R ein diskreter Bewertungsring. Definiere zu einem Element $q \in Q(R)$, $q \neq 0$, die Ordnung

$$\operatorname{ord}(q) \in \mathbb{Z}\,.$$

Dabei soll die Definition mit der Ordnung für Elemente aus R übereinstimmen und einen Gruppenhomomorphismus $Q(R) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ definieren. Was ist der Kern dieses Homomorphismus?

Aufgabe 21.5. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $K(T)$ der Körper der rationalen Funktionen über K. Finde einen diskreten Bewertungsring $R \subset K(T)$ mit $Q(R) = K(T)$ und mit $R \cap K[T] = K$.

Aufgabe 21.6. (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Eine *Potenzreihe in einer Variablen* über K ist ein formaler Ausdruck der Form

$$a_0 + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3 + \ldots \text{ mit } a_i \in K\,.$$

Es kann hier also unendlich viele von null verschiedene Koeffizienten a_i geben. Definiere eine Ringstruktur auf der Menge aller Potenzreihen, die die Ringstruktur auf dem Polynomring in einer Variablen fortsetzt. Zeige, dass dieser Ring ein diskreter Bewertungsring ist.

Aufgabe 21.7. (4 Punkte)

Es sei R ein Integritätsbereich mit folgender Eigenschaft: zu je zwei Elementen $f, g \in R$ gelte, dass f ein Teiler von g ist oder dass g ein Teiler von f ist. Es sei R noethersch, aber kein Körper. Zeige, dass R ein diskreter Bewertungsring ist.

Aufgabe 21.8. (5 Punkte)

Zeige, dass ein noetherscher abstrakter Bewertungsring schon diskret ist.

Aufgabe 21.9. (3 Punkte)

Zeige, dass in $K[X,Y]_{(X,Y)}/(X^2 - Y^3)$ jedes Ideal durch maximal zwei Erzeuger gegeben ist.

Aufgabe 21.10. (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer ebenen monomialen Kurve und eines Ideals im zugehörigen lokalen Ring der Singularität, das nicht von zwei Elementen erzeugt werden kann.