Zahlentheorie (Osnabrück SS 2008)

Arbeitsblatt 21

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Sei H eine (additive) Untergruppe der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Zeige, dass entweder $H = \mathbb{Z}a$ mit einer eindeutig bestimmten nicht-negativen reellen Zahl a ist, oder aber H dicht in $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 2. (2 Punkte)

Sei p eine Primzahl und betrachte die quadratische Erweiterung $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$. Zeige, dass dies eine dichte Untergruppe der reellen Zahlen ist.

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Charakterisiere für den Ring

$$R = \mathbb{Z}[\tfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}] \cong \mathbb{Z}[Y]/(Y^2 + Y + 1)$$

der Eisenstein-Zahlen die Primzahlen aus $\mathbb{Z}$, die in R verzweigt sind, träge sind oder zerfallen.

Aufgabe 4. (2 Punkte)

Sei $A_{10} = \mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ der quadratische Zahlbereich zu $D = 10$. Bestimme gemäß Satz 21.1 eine $\mathbb{Z}$-Basis des Ideals $(3 + 4\sqrt{10})$ und bestimme damit die Norm des Ideals.

Aufgabe 5. (2 Punkte)

Sei $R = A_D$ ein quadratischer Zahlbereich und $f \in R$ mit $(f) \cap \mathbb{Z} = (N(f))$. Zeige auf zwei verschiedene Arten, dass es (mit der Notation des Beweises von Satz 21.1) eine $\mathbb{Z}$-Basis des Ideals (f) gibt mit $\beta = 1$.

Aufgabe 6. (2 Punkte)

Sei $A_{-10} = \mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$ der quadratische Zahlbereich zu $D = -10$. Zeige, dass das Ideal $(6 + 5\sqrt{-10}, 3 - 2\sqrt{10})$ ein Hauptideal ist und gebe einen Erzeuger an.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Sei R ein Zahlbereich. Zeige unter Verwendung der Norm, dass jedes Element $f \in R$, $f \neq 0$, eine Faktorisierung in irreduzible Elemente besitzt.

Aufgabe 8. (2 Punkte)

Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem kommutativen Ring R. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ ein Primideal ist genau dann, wenn $\mathfrak{a}$ der Kern eines Ringhomomorphismus $\varphi : R \to K$ in einen Körper K ist.

Aufgabe 9. (2 Punkte)

Sei R ein noetherscher, kommutativer Ring. Zeige, dass dann auch jeder Restklassenring $R/\mathfrak{a}$ noethersch ist.

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Sei R ein vom Nullring verschiedener kommutativer Ring. Zeige unter Verwendung des Lemmas von Zorn, dass es maximale Ideale in R gibt.

Aufgabe 11. (6 Punkte)

Eine (Fußball-)Spielgruppe bei einer Europa- oder Weltmeisterschaft besteht aus vier Mannschaften, und jede spielt gegen jede. Ein Spiel kann unentschieden oder mit einem Sieg für eine der beiden Mannschaften enden. Wir interessieren uns für die diskrete Struktur einer Spielgruppe, die man durch einen Graphen beschreiben kann, wobei man einen Sieg von A über B durch einen Pfeil von A nach B (und ein Unentschieden durch keine Verbindung) ausdrücken kann.

Definiere einen Isomorphiebegriff für Spielgruppen und klassifiziere die Spielgruppen entlang geeigneter numerischer Invarianten. Wie viele Spielgruppen gibt es? Aus welchen Isomorphietypen lässt sich die Tabellenordnung ableiten, aus welchen nicht?