Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Arbeitsblatt 1

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 1.1. Es seien A, B und C drei Mengen. Man beweise die folgenden Identitäten.

(1) $A \cap \emptyset = \emptyset$,
(2) $A \cup \emptyset = A$,
(3) $A \cap B = B \cap A$,
(4) $A \cup B = B \cup A$,
(5) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
(6) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
(7) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Aufgabe 1.2. Skizziere die folgenden Teilmengen im $\mathbb{R}^2$.

(1) $\{(x, y) : x = 5\}$,
(2) $\{(x, y) : x \geq 4 \text{ und } y = 3\}$,
(3) $\{(x, y) : y^2 \geq 2\}$,
(4) $\{(x, y) : |x| = 3 \text{ und } |y| \leq 2\}$,
(5) $\{(x, y) : 3x \geq y \text{ und } 5x \leq 2y\}$,
(6) $\{(x, y) : xy = 0\}$,
(7) $\{(x, y) : xy = 1\}$,
(8) $\{(x, y) : xy \geq 1 \text{ und } y \geq x^3\}$,
(9) $\{(x, y) : 0 = 0\}$,
(10) $\{(x, y) : 0 = 1\}$.

Welche geometrische Gestalt haben die Mengen, in deren Beschreibung nur eine (oder gar keine) Variable vorkommt?

Aufgabe 1.3. Beschreibe für je zwei (einschließlich dem Fall, dass das Produkt mit sich selbst genommen wird) der folgenden geometrischen Mengen die Produktmengen.

(1) Eine Kreislinie K.
(2) Ein Geradenstück I.
(3) Eine Gerade G.
(4) Eine Parabel P.

Welche Produktmengen lassen sich als Teilmenge im Raum realisieren, welche nicht?

Aufgabe 1.4. Eine Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x),$$

heißt *streng wachsend*, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ auch $f(x_1) < f(x_2)$ gilt. Zeige, dass eine streng wachsende Funktion f injektiv ist.

Aufgabe 1.5. Es sei M eine Menge und $a, b \in M$ zwei verschiedene Elemente. Definiere eine Bijektion von M nach M, die a und b vertauscht, und sonst alle Elemente unverändert lässt.

(Eine solche Abbildung heißt *Transposition*).

Aufgabe 1.6. Bestimme die Hintereinanderschaltungen

$$\varphi \circ \psi \text{ und } \psi \circ \varphi$$

für die Abbildungen $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$\varphi(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 5 \text{ und } \psi(x) = 2x^3 - x^2 + 6x - 1$$

definiert sind.

Aufgabe 1.7. Man gebe Beispiele für Abbildungen

$$\varphi, \psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

derart, dass φ injektiv, aber nicht surjektiv ist, und dass ψ surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Aufgabe 1.8. Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist f auch injektiv.

In der folgenden Aufgabe wird zu zwei Mengen S und T die *Menge der Abbildungen* von S nach T verwendet, also

$$\operatorname{Abb}(S, T) = \{f : S \to T :\ f \text{ Abbildung}\}.$$

Aufgabe 1.9. Seien M, N, L Mengen. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\mathrm{Abb}\,(M \times N, L) \text{ und } \mathrm{Abb}\,(M, \mathrm{Abb}\,(N, L))\,.$$

Man mache sich diese Situation für $M = N = [0,1]$ und $L = \mathbb{R}$ klar.

Aufgabe 1.10. Der Pferdepfleger hat einen Korb voller Äpfel und geht auf die Weide, um die Äpfel an die Pferde zu verteilen. Danach geht jedes Pferd in seine Lieblingskuhle und macht dort einen großen Pferdeapfel. Modelliere den Vorgang mit geeigneten Mengen und Abbildungen. Man mache sich die Begriffe injektiv, surjektiv, Bild und Urbild an diesem Beispiel klar. Kann die Gesamtabbildung surjektiv sein, wenn es 10 Äpfel, 6 Pferde und 8 Kuhlen gibt?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 1.11. (5 Punkte)

Beweise die mengentheoretische Fassung einiger aristotelischen Syllogismen. Dabei bezeichnen A, B, C Mengen.

(1) Modus Barbara: Aus $B \subseteq A$ und $C \subseteq B$ folgt $C \subseteq A$.
(2) Modus Celarent: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \subseteq B$ folgt $C \cap A = \emptyset$.
(3) Modus Darii: Aus $B \subseteq A$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \cap A \neq \emptyset$.
(4) Modus Ferio: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \not\subseteq A$.
(5) Modus Baroco: Aus $B \subseteq A$ und $B \cap C \neq \emptyset$ folgt $A \cap C \neq \emptyset$.

Aufgabe 1.12. (4 Punkte)

Es seien A und B zwei Mengen. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) $A \subseteq B$,
(2) $A \cap B = A$,
(3) $A \cup B = B$,
(4) $A \setminus B = \emptyset$.
(5) Es gibt eine Menge C mit $B = A \cup C$,
(6) Es gibt eine Menge D mit $A = B \cap D$.

Aufgabe 1.13. (3 Punkte)

Man beschreibe eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 1.14. (2 Punkte)

Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, so ist auch g surjektiv.

Zeige durch ein Beispiel, dass die Umkehrung nicht gilt.

Aufgabe 1.15. (2 Punkte)

Sei M eine Menge. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\mathfrak{P}(M) \text{ und } \operatorname{Abb}(M, \{0,1\}).$$

In der Beantwortung der folgenden Frage dürfen die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und Grundtatsachen über stetige Funktionen naiv verwendet werden. Man mache sich aber schon jetzt Gedanken, welche Gesetzmäßigkeiten man verwendet. Man frage sich auch, wie die Antworten aussehen, wenn man $\mathbb{R}$ durch die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ersetzt.

Aufgabe 1.16. (3 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^2 + 2x - 3.$$

Bestimme das Bild des Intervalls $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} :\ 0 \leq x \leq 1\}$, von $\{3\}$, von $\mathbb{R}$ und von $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in R :\ x \geq 0\}$.

Bestimme das Urbild von $\{0\}$, von $[0,1]$, von $\{3\}$, von $\mathbb{R}$, von $\mathbb{R}_{\leq 0}$ und von $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Aufgabe 1.17. (2 Punkte)

Betrachte auf der Menge $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ die Abbildung

$$\varphi : M \longrightarrow M,\ x \longmapsto \varphi(x),$$

die durch die Wertetabelle

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	2	5	6	1	4	3	7	7

gegeben ist. Berechne φ^{1003}, also die 1003-te Hintereinanderschaltung (oder *Iteration*) von φ mit sich selbst.