Fachbereich Mathematik/Informatik **30. September 2010**
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik II

Klausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt, außer $\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x$.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Ich erkäre mich durch meine Unterschrift einverstanden, dass mein Klausurergebnis mit meiner Matrikelnummer per Aushang oder im Internet bekanntgegeben wird.

Unterschrift: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$
mögliche Pkt.:	4	4	3	4	5	9	8	9	3	6	5	4	64
erhaltene Pkt.:													

Note:

AUFGABE 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (*kursiv* gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *rationale Funktion* (in einer Variablen über $\mathbb{R}$).
(2) Eine *Stammfunktion* zu einer Funktion $f:]a,b[\to \mathbb{R}$.
(3) Eine in einem Punkt *total differenzierbare* Abbildung.
(4) Ein C^1-*Diffeomorphismus*.
(5) Der *Dualraum* eines K-Vektorraumes.
(6) Die *Hesse-Matrix* zu einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion

$$h : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

in einem Punkt $P \in G$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.
(7) Eine *invariante* Fahne zu einer linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

(8) Ein *zeitunabhängiges Vektorfeld*.

Lösung

(1) Eine rationale Funktion ist eine Funktion f, die man als Quotient aus zwei Polynomen $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ mit $Q \neq 0$ darstellen kann, also $f = P/Q$ (sie ist außerhalb der Nullstellen von Q definiert).
(2) Eine Funktion $F:]a,b[\to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* zu f, wenn F auf $]a,b[$ differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ gilt für alle $x \in]a,b[$.
(3) Es seien V und W endlichdimensionale (euklidische oder normierte) $\mathbb{K}$-Vektorräume, $G \subseteq V$ eine offene Menge und $\varphi : G \to W$ eine Abbildung. Dann heißt φ *total differenzierbar* im Punkt $P \in G$, wenn es eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $L : V \to W$ mit der Eigenschaft

$$\varphi(P + v) = \varphi(P) + L(v) + ||v||\, r(v)$$

gibt, wobei $r : U(0, \delta) \to W$ eine in 0 stetige Abbildung mit $r(0) = 0$ ist und die Gleichung für alle $v \in V$ mit $P + v \in U(P, \delta) \subseteq G$ gilt.
(4) Es seien V_1 und V_2 euklidische Vektorräume und $U_1 \subseteq V_1$ und $U_2 \subseteq V_2$ offene Teilmengen. Eine Abbildung

$$\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$$

heißt C^1-*Diffeomorphismus*, wenn φ bijektiv und stetig differenzierbar ist, und wenn die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} : U_2 \longrightarrow U_1$$

ebenfalls stetig differenzierbar ist.

(5) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann heißt der Homomorphismenraum

$$V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$$

der *Dualraum* zu V.

(6) Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und

$$h : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zu $P \in G$ heißt die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial x_1}(P) & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial h}{\partial x_1}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial x_n}(P) & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial h}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix}$$

die *Hesse-Matrix* zu f im Punkt P.

(7) Sei V ein Vektorraum der Dimension n und

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine lineare Abbildung. Eine Fahne

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{R}^n$$

heißt *f-invariant*, wenn $f(V_i) \subseteq V_i$ ist für alle $i = 0, 1, \ldots, n-1, n$.

(8) Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $U \subseteq V$ eine offene Menge. Dann nennt man eine Abbildung

$$f : I \times U \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein *zeitunabhängiges Vektorfeld*, wenn $f(t, v) = f(s, v)$ ist für alle $s, t \in I$, $v \in U$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Die *Kettenregel* für total differenzierbare Abbildungen.
(2) Der *Satz über die (lokale) Umkehrabbildung.*
(3) Der *Sylvestersche Trägheitssatz* über eine symmetrische Bilinearform.
(4) Der *Banachsche Fixpunktsatz.*

Lösung

(1) Seien V, W und U endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, $G \subseteq V$ und $D \subseteq W$ offene Mengen, und $\varphi : G \to W$ und $\psi : D \to U$ Abbildungen derart, dass $\varphi(G) \subseteq D$ gilt. Es sei weiter angenommen, dass φ in $P \in G$ und ψ in $\varphi(P) \in D$ differenzierbar ist. Dann ist $\psi \circ \varphi : G \to U$ in P differenzierbar mit dem totalen Differential
$$(D(\psi \circ \varphi))_P = (D\psi)_{\varphi(P)} \circ (D\varphi)_P .$$
(2) Es seien V_1 und V_2 euklidische Vektorräume, sei $G \subseteq V_1$ offen und es sei
$$\varphi : G \longrightarrow V_2$$
eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $P \in G$ ein Punkt derart, dass das totale Differential
$$(D\varphi)_P$$
bijektiv ist. Dann gibt es eine offene Menge $U_1 \subseteq G$ und eine offene Menge $U_2 \subseteq V_2$ mit $P \in U_1$ und mit $\varphi(P) \in V_2$ derart, dass φ eine Bijektion
$$\varphi|_{U_1} : U_1 \longrightarrow U_2$$
induziert, und dass die Umkehrabbildung
$$(\varphi|_{U_1})^{-1} : U_2 \longrightarrow U_1$$
ebenfalls stetig differenzierbar ist.
(3) Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, - \rangle$ vom Typ (p, q). Dann ist die Gramsche Matrix von $\langle -, - \rangle$ bzgl. einer jeden Orthogonalbasis eine Diagonalmatrix mit p positiven und q negativen Einträgen.
(4) Es sei M ein nicht-leerer vollständiger metrischer Raum und
$$f : M \longrightarrow M$$
eine stark kontrahierende Abbildung. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt.

Aufgabe 3. (3 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral zur Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = 2x^3 + 3e^x - \sin x\,,$$

über $[-1, 0]$.

Lösung

Eine Stammfunktion ist

$$\frac{1}{2}x^4 + 3e^x + \cos x\ .$$

Daher ist das bestimmte Integral gleich

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} f(x)\,dx &= \left(\frac{1}{2}x^4 + 3e^x + \cos x\right)\Big|_{-1}^{0} \\ &= (0 + 3 + 1) - \left(\frac{1}{2}(-1)^4 + 3e^{-1} + \cos(-1)\right) \\ &= \frac{7}{2} - 3e^{-1} - \cos(-1)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Bestimme eine Stammfunktion von

$$\frac{5x^3 + 4x - 3}{x^2 + 1}$$

mittels Partialbruchzerlegung.

Lösung

Da der Grad des Zählerpolynoms größer als der Grad des Nennerpolynoms ist, führen wir zuerst eine Polynomdivision durch. Diese ergibt

$$5x^3 + 4x - 3 \;=\; (x^2 + 1)(5x) - x - 3$$

und daher ist

$$\frac{5x^3 + 4x - 3}{x^2 + 1} \;=\; 5x - \frac{x}{x^2 + 1} - 3\frac{1}{x^2 + 1}.$$

Eine Stammfunktion ist also

$$\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}\,\ln\left(x^2 + 1\right) - 3\,\arctan\,x\,.$$

AUFGABE 5. (5 Punkte)
Finde eine Lösung für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{t}{t^2 - 1} y^2$$

mit $t > 1$ und $y < 0$.

Lösung

Es liegt eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen vor. Wir setzen

$$h(y) = \frac{1}{y^2} \,,$$

davon ist

$$H(y) = -y^{-1}$$

eine Stammfunktion. Die Umkehrfunktion davon ist ebenfalls

$$H^{-1}(u) = -u^{-1} \,.$$

Wir setzen weiter $g(t) = \frac{t}{t^2-1}$. Wir machen den Ansatz für die Partialbruchzerlegung, also

$$\frac{t}{t^2 - 1} \;=\; \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1}.$$

Daraus ergibt sich die Bedingung

$$t \;=\; a(t+1) + b(t-1)$$

und daraus

$$a = b = \frac{1}{2} \,.$$

Also ist

$$G(t) = \frac{1}{2}\, \ln(t+1) + \frac{1}{2}\, \ln(t-1)$$

eine Stammfunktion von $g(t)$. Daher ist

$$y(t) = \frac{-2}{\ln(t+1) + \ln(t-1)}$$

eine Lösung, die für $t > 1$ definiert ist und für die $y(t) < 0$ gilt.

Aufgabe 6. (9 Punkte)
Es sei
$$f :]0,1] \longrightarrow [0,\infty[$$
eine stetige, streng fallende, bijektive Funktion mit der ebenfalls stetigen Umkehrfunktion
$$f^{-1} : [0,\infty[\longrightarrow]0,1].$$
Es sei vorausgesetzt, dass das uneigentliche Integral $\int_0^1 f(t)\,dt$ existiert. Zeige, dass dann auch das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f^{-1}(y)\,dy$ existiert und dass der Wert dieser beiden Integrale übereinstimmt.

Lösung

Es sei F eine Stammfunktion zu der stetigen Funktion f. Nach Voraussetzung existiert
$$F(0) := \lim_{x\to 0} F(x)\,.$$
Der Wert des uneigentlichen Integrals ist
$$\int_0^1 f(t)\,dt \;=\; F(1) - F(0).$$
Durch Addition einer Konstanten können wir $F(0) = 0$ annehmen.

Zu jedem $x \in]0,1]$ ist
$$\int_0^x f(t)\,dt + \int_x^1 f(t)\,dt \;=\; \int_0^1 f(t)\,dt \;=\; F(1),$$
und wegen der Monotonie ist
$$\int_0^x f(t)\,dt \;\geq\; xf(x).$$
Für $x \mapsto 0$ konvergiert das rechte Integral gegen $F(1)$ und das linke Integral gegen 0. Daher gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein x_0 mit
$$xf(x) \;\leq\; \epsilon$$
für alle $x \leq x_0$.

Die Umkehrfunktion f^{-1} besitzt die Stammfunktion
$$G(y) = yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y))\,.$$
Wir müssen zeigen, dass diese Funktion für $y \mapsto \infty$ einen Limes besitzt. Für $y \mapsto \infty$ gilt $f^{-1}(y) \mapsto 0$ und somit ist wegen der Stetigkeit
$$\lim_{y\to\infty} F(f^{-1}(y)) = 0\,.$$
Wir behaupten, dass auch der linke Summand einen Limes für $y \mapsto \infty$ besitzt. Dazu sei $\epsilon > 0$ und sei x_0 wie oben gewählt. Da f^{-1} fallend (und bijektiv) ist,

gibt es ein y_0 mit $f^{-1}(y_0) = x_0$. Daher gelten für alle $y \geq y_0$ (mit $y = f(x)$) die Abschätzungen

$$yf^{-1}(y) \;=\; f(x)f^{-1}(f(x)) \;=\; f(x)x \;\leq\; \epsilon.$$

Daher ist

$$\lim_{y\to\infty} yf^{-1}(y) = 0$$

und das uneigentliche Integral existiert. Sein Wert ist

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f^{-1}(y)\,dy &= \lim_{y\to\infty} G(y) - G(0) \\
&= \lim_{y\to\infty} (yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y))) - (-F(1)) \\
&= -F(0) + F(1) \\
&= \int_0^1 f(t)\,dt.
\end{aligned}$$

AUFGABE 7. (8 (1+4+3) Punkte)

Wir betrachten die differenzierbare Kurve

$$f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t,\ \sin\ t\,).$$

a) Skizziere das Bild dieser Kurve und den Streckenzug, der sich ergibt, wenn man das Definitionsintervall in vier gleichlange Teilintervalle unterteilt.

b) Berechne die Gesamtlänge des in a) beschriebenen Streckenzugs.

c) Zeige, dass für die Länge L dieser Kurve die Abschätzung

$$L \;\leq\; \sqrt{2}\pi$$

gilt.

Lösung

b) Die Unterteilungspunkte sind

$$0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\,.$$

Der Sinus hat dabei folgende Werte:

$$\sin\ 0\ = 0,\ \sin\ \frac{\pi}{4}\ = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\ \frac{\pi}{2}\ = 1,\ \sin\ \frac{3\pi}{4}\ = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\ \pi\ = 0\,.$$

Dabei ergibt sich die zweite Gleichung aus $\sin\ \frac{\pi}{4}\ = \cos\ \frac{\pi}{4}$ und der Kreisgleichung $\sin^2\ x\ +\ \cos^2\ x\ = 1$. Die dritte Gleichung folgt daraus aus der Symmetrie des Sinus.

Die erste Teilstrecke des Streckenzugs verbindet die beiden Punkte $(0, 0)$ und $(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, deren Länge ist also

$$\begin{aligned}
\sqrt{(\frac{\pi}{4})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} &= \sqrt{\frac{\pi^2}{4^2} + \frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{\pi^2}{4^2} + \frac{8}{4^2}} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\pi^2 + 8}.
\end{aligned}$$

Die zweite Teilstrecke des Streckenzugs verbindet die beiden Punkte $(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $(\frac{\pi}{2}, 1)$, deren Länge ist also

$$\begin{aligned}
\sqrt{(\frac{\pi}{4})^2 + (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})^2} &= \sqrt{\frac{\pi^2}{4^2} + (\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}})^2} \\
&= \sqrt{\frac{\pi^2}{4^2} + \frac{2 + 1 - 2\sqrt{2}}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{\pi^2}{4^2} + \frac{24 - 16\sqrt{2}}{4^2}} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{\pi^2 + 24 - 16\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Die dritte Teilstrecke ist gleichlang zur zweiten und die vierte Teilstrecke ist gleichlang zur ersten. Daher ist die Gesamtlänge dieses Streckenzugs insgesamt gleich

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\pi^2 + 8} + \sqrt{\pi^2 + 24 - 16\sqrt{2}}\right).$$

c) Da die Kurve stetig differenzierbar ist, ist sie auch rektifizierbar, und ihre Länge ist gleich

$$L = \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 t}\, dt\,.$$

Wegen $-1 \le \cos t \le 1$ ist $\cos^2 t \le 1$ und daher ist $1 + \cos^2 t \le 2$. Wegen der Monotonie der Quadratwurzel folgt

$$\sqrt{1 + \cos^2 t} \le \sqrt{2}.$$

Also ist

$$\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 t}\, dt \le \int_0^\pi \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\pi.$$

AUFGABE 8. (9 Punkte)

Beweise die Kettenregel für total differenzierbare Abbildungen.

Lösung

Wir haben nach Voraussetzung (wobei wir $Q := \varphi(P)$ setzen)

$$\varphi(P+v) = \varphi(P) + L(v) + ||v||\, r(v)$$

und

$$\psi(Q+w) = \psi(Q) + M(w) + ||w||\, s(w)$$

mit linearen Abbildungen $L : V \to W$ und $M : W \to U$, und mit in 0 stetigen Funktionen $r : U(0,\delta) \to W$ und $s : U(0,\delta') \to U$ (beachte, dass $U(P,\delta) \subseteq V$ und $U(Q,\delta') \subseteq W$ gilt), die beide in 0 den Wert 0 annehmen. Damit gilt

$$\begin{aligned}
& (\psi \circ \varphi)(P+v) \\
= \; & \psi(\varphi(P+v)) \\
= \; & \psi(\varphi(P) + L(v) + ||v||\, r(v)) \\
= \; & \psi(\varphi(P)) + M(L(v) + ||v||\, r(v)) \\
& + ||L(v) + ||v||\, r(v)||\, s(L(v) + ||v||\, r(v)) \\
= \; & \psi(\varphi(P)) + M(L(v)) + M(||v||\, r(v)) \\
& + ||L(v) + ||v||\, r(v)||\, s(L(v) + ||v||\, r(v)) \\
= \; & \psi(\varphi(P)) + (M \circ L)(v) + ||v||\, M(r(v)) + \\
& ||(||v||\, L(\frac{v}{||v||}) + ||v||\, r(v))||\, s(L(v) + ||v||\, r(v)) \\
= \; & \psi(\varphi(P)) + (M \circ L)(v) \\
& + ||v|| \left(M(r(v)) + ||L(\frac{v}{||v||}) + r(v)||\, s(L(v) + r(v)) \right).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in der dritten Gleichung die lineare Approximation für $w = L(v) + ||\,v\,||\, r(v)$ eingesetzt. Die beiden letzten Gleichungen gelten nur für $v \neq 0$. Der Ausdruck

$$t(v) := M(r(v)) + ||L(\frac{v}{||v||}) + r(v)||\, s(L(v) + r(v))$$

ist unser Kandidat für die Abweichungsfunktion. Der erste Summand $M(r(v))$ ist in $v = 0$ stetig und hat dort auch den Wert 0. Es genügt also den zweiten Summanden zu betrachten. Der $|| - ||$-Ausdruck ist in einer Umgebung der Null beschränkt, da L auf der kompakten Einheitssphäre beschränkt ist und da r in 0 stetig ist. Daher hängt die Stetigkeit nur von dem rechten Faktor ab. Aber $L(v) + r(v)$ hat für $v \to 0$ den Grenzwert 0. Damit ist auch $s(L(v) + r(v))$ in 0 stetig und hat dort den Grenzwert 0.

Aufgabe 9. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

das zeigt, dass im Satz über die (lokale) Umkehrbarkeit die Bijektivität im Allgemeinen nur auf echten Teilintervallen besteht.

Lösung

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2.$$

Diese Funktion ist stetig differenzierbar mit $f'(x) = 2x$. Im Punkt $x = 1$ gilt $f'(1) = 2 \neq 0$, so dass dort der Satz über die lokale Umkehrbarkeit anwendbar ist (und zwar liegt eine Bijektion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit der Quadratwurzel als Umkehrfunktion vor). Es gibt aber keine Umkehrfunktion auf ganz $\mathbb{R}$, da wegen $x^2 = (-x)^2$ die Funktion nicht injektiv ist.

Aufgabe 10. (6 (3+3) Punkte)
Wir betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto \frac{xz}{x^2 + y^2}$$

(es ist also $y > 0$).

a) Berechne die partiellen Ableitungen von f und stelle den Gradienten zu f auf.

b) Bestimme die isolierten lokalen Extrema von f.

Lösung

a) Es handelt sich um eine rationale Funktionen in mehreren Variablen ohne Nullstelle des Nenners, daher existieren alle partiellen Ableitungen. Die partiellen Ableitungen von f ergeben sich aus der Quotientenregel; sie sind

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xz}{x^2 + y^2}\right) = \frac{z(x^2 + y^2) - 2x^2 z}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{z(-x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xz}{x^2 + y^2}\right) = \frac{-2xyz}{(x^2 + y^2)^2}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xz}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Der Gradient zu f in einem Punkt $P = (x, y, z)$ ist demnach der Vektor

$$\text{grad } f(P) = \left(\frac{z(-x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-2xyz}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right).$$

b) Da der Definitionsbereich offen ist und da die Funktion stetig differenzierbar ist, ist es für die Existenz eines lokalen Extremums eine notwendige Bedingung, dass der Gradient 0 ist. Dies kann wegen der dritten partiellen Ableitung nur bei $x = 0$ der Fall sein. Dann ist die zweite partielle Ableitung ebenfalls 0 und wegen $y > 0$ folgt aus der ersten partiellen Ableitung, dass $z = 0$ sein muss. Extrema kann es also allenfalls bei Punkten der Form $(0, y, 0)$ geben. Die Funktion hat aber bei all diesen Punkten den Wert 0, so dass es kein isoliertes Extremum gibt.

Aufgabe 11. (5 Punkte)
Untersuche die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto -3x^2 + 2xy - 7y^2 + x,$$

auf Extrema.

Lösung

Die partiellen Ableitungen der Funktion f sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -6x + 2y + 1$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 14y.$$

Eine notwendige Voraussetzung für die Existenz eines lokalen Extremums ist, dass der Gradient 0 ist. Aus

$$-6x + 2y + 1 = 0 \text{ und } 2x - 14y = 0$$

folgt sofort

$$-40y + 1 = 0\,,$$

also $y = \frac{1}{40}$ und daraus

$$x = \frac{7}{40}\,.$$

Es kann also allenfalls im Punkt $P = (\frac{7}{40}, \frac{1}{40})$ ein lokales Extremum vorliegen.

Die Hesse-Matrix der Funktion ist

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -14 \end{pmatrix}.$$

Der Eintrag links oben ist also negativ und die Determinante ist positiv. Daher ist die Hesse-Matrix negativ definit und somit liegt in P ein lokales Maximum vor. Da es sonst kein weiteres lokales Extremum gibt, ist dieses Maximum isoliert und global.

Aufgabe 12. (4 Punkte)

Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Lösung

Aus der zweiten Zeile folgt sofort

$$v_2(t) = e^{2t} ,$$

was auch die Anfangsbedingung $v_2(0) = 1$ erfüllt. Für v_1 ergibt sich daraus die inhomogene lineare Differentialgleichung in einer Variablen,

$$v_1' = 3v_1 - 4e^{2t} \text{ mit } v_1(0) = 5 .$$

Die zugehörige homogene lineare Gleichung besitzt die Lösungen ce^{3t}. Mittels Variation der Konstanten, also dem Ansatz $v_1(t) = c(t)e^{3t}$, ergibt sich die Bedingung

$$c'(t) = -4e^{2t} \cdot e^{-3t} = -4e^{-t}.$$

Also ist $c(t) = 4e^{-t} + b$ mit einer Konstanten $b \in \mathbb{R}$. Aus

$$(4e^0 + b)e^0 = 5$$

folgt $b = 1$. Die Lösung ist also

$$\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4e^{-t} + 1)e^{3t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} .$$