Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 3

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 3.1. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $n \geq 2$. Zeige, dass ein Punkt $P \in \mathbb{A}_K^n$ nicht die Nullstellenmenge zu einem einzigen Polynom ist.

Aufgabe 3.2. Es sei K ein endlicher Körper und $M = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\} \in \mathbb{A}_K^n$ eine endliche Menge von Punkten. Zeige, dass M die Nullstellenmenge eines einzigen Polynoms ist.

Aufgabe 3.3. Man beschreibe eine Abbildung

$$\varphi : \mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^1,$$

die bezüglich der Zariski-Topologie stetig ist, die aber nicht durch ein Polynom gegeben ist.

Aufgabe 3.4. Charakterisiere in $\mathbb{Z}$ die Radikale mit Hilfe der Primfaktorzerlegung.

Aufgabe 3.5. Zeige, dass ein Ideal $\mathfrak{a}$ in einem kommutativen Ring R genau dann ein Radikal ist, wenn der Restklassenring $R/\mathfrak{a}$ reduziert ist.

Aufgabe 3.6. Zeige, dass ein Primideal ein Radikal ist.

Aufgabe 3.7. Seien R und S kommutative Ringe und sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Sei $\mathfrak{a}$ ein Radikal in S. Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(\mathfrak{a})$ ein Radikal in R ist.

Aufgabe 3.8. Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Ideale in $K[X_1, \ldots, X_n]$ derart, dass ihre Radikale gleich sind. Zeige, dass dann auch ihre Nullstellenmengen übereinstimmen. Zeige durch ein Beispiel, dass die Umkehrung nicht stimmt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 3.9. (3 Punkte)

Es sei $M = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\} \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ eine endliche Menge von Punkten. Zeige, dass M die Nullstellenmenge eines einzigen Polynoms ist.

Aufgabe 3.10. (3 Punkte)

Zeige, dass die Menge der reellen trigonalisierbaren (2×2)-Matrizen im $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ keine affin-algebraische Menge ist.

Aufgabe 3.11. (3 Punkte)

Sei

$$\varphi : \mathbb{A}^n_K \longrightarrow \mathbb{A}^m_K$$

eine Abbildung, die durch m Polynome in n Variablen gegeben sei. Zeige, dass φ stetig bezüglich der Zariski-Topologie ist.

Aufgabe 3.12. (5 Punkte)

Es sei K ein unendlicher Körper. Zeige, dass jede nichtleere Zariski-offene Menge $U \subseteq \mathbb{A}^n_K$ dicht ist.

Tipp: Induktion über n.

Aufgabe 3.13. (5 Punkte)

Bestimme zu den folgenden Teilmengen der affinen Ebene $\mathbb{A}^2_K$ den Zariski-Abschluss.

(1) $\{(x, \sin(x)) | \, x \in \mathbb{R}\}$,
(2) $\{(\cos(x), \sin(x)) | \, x \in \mathbb{R}\}$,
(3) $\{(x, x^3) | \, 0 \leq x \leq 1, \, x \in \mathbb{R}\}$,
(4) $\{(x, x^3) | \, 0 \leq x \leq 1, \, x \in \mathbb{Q}\}$,
(5) $\{(x, x^3) | \, x \in \mathbb{Z}/(5)\}$.

Die folgende Aufgabe benutzt einige weiterführende topologische Begriffe.

Aufgabe 3.14. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper.

(1) Man zeige, dass für $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{C}$ die Standardtopologie feiner ist als die Zariski-Topologie.

(2) Man zeige, dass für $K[X]$ die Zariski-Topologie mit der kofiniten Topologie übereinstimmt. Gilt dies auch für $K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $n > 1$?
(3) Wann ist die Zariski-Topologie T_1, wann ist sie hausdorffsch?
(4) Wie sieht die Zariski-Topologie aus, wenn K ein endlicher Körper ist?