Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Mathematik III

Vorlesung 73

Korollar 73.1. *Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und*

$$v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine messbare Abbildung. Dann ist die Abbildung

$$\varphi_v : M \times \mathbb{R}^n \longrightarrow M \times \mathbb{R}^n,\ (x, y) \longmapsto (x, y + v(x)),$$

bijektiv und maßtreu.

Beweis. Die Abbildung φ_v ist messbar nach Lemma 65.11 und nach Lemma 69.3. Sie ist ferner bijektiv, die Umkehrabbildung ist φ_{-v}. Sei $T \subseteq M \times N$ messbar. Wir müssen

$$(\mu \otimes \lambda^n)(T) = (\mu \otimes \lambda^n)(\varphi_v^{-1}(T))$$

zeigen. Für $x \in M$ ist

$$(\varphi_v^{-1}(T))(x) = \{y \in \mathbb{R}^n |\, (x, y) \in \varphi_v^{-1}(T)\} = \{y \in \mathbb{R}^n |\, (x, y + v(x)) \in T\}.$$

Aufgrund der Translationsinvarianz des Borel-Lebesgue-Maßes besitzt diese Menge das gleiche Maß wie

$$\begin{aligned} & \{y + v(x) \in \mathbb{R}^n |\, (x, y + v(x)) \in T\} \\ = & \{z \in \mathbb{R}^n |\, (x, z) \in T\} \\ = & T(x). \end{aligned}$$

Aufgrund der Integrationsversion des Cavalieri-Prinzips gilt also

$$\begin{aligned} (\mu \otimes \lambda^n)(T) &= \int_M \lambda^n(T(x))\, d\mu(x) \\ &= \int_M \lambda^n((\varphi_v^{-1}(T))(x))\, d\mu(x) \\ &= (\mu \otimes \lambda^n)(\varphi_v^{-1}(T)). \end{aligned}$$

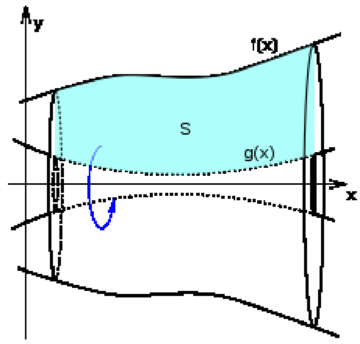
□

Einige Volumina

Definition 73.2. Zu einer Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ nennt man

$$\{(x, y \cos \alpha\, , y \sin \alpha\,) \in \mathbb{R}^3 |\, (x,y) \in T,\ \alpha \in [0, 2\pi]\}$$

die zugehörige *Rotationsmenge* (um die x-Achse).



Satz 73.3. *Es sei*

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ t \longmapsto f(t),$$

eine nichtnegative messbare Funktion und sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ der Rotationskörper zum Subgraphen von f um die x-Achse. Dann besitzt K das Volumen

$$\lambda^3(K) \ = \ \pi \cdot \int_{[a,b]} (f(t))^2 \, d\lambda(t) \ = \ \pi \cdot \int_a^b (f(t))^2 \, dt,$$

wobei für die zweite Formel f als stetig vorausgesetzt sei.

Beweis. Nach dem Cavalieri-Prinzip und nach der Formel für den Flächeninhalt des Kreises ist

$$(\lambda \otimes \lambda^2)(K) \ = \ \int_{[a,b]} \lambda^2(K(t)) \, d\lambda(t) \ = \ \pi \int_{[a,b]} (f(t))^2 \, d\lambda(t).$$

Für stetiges f ist dies nach Satz 71.5 gleich

$$\pi \int_a^b (f(t))^2 \, dt\,.$$

□

Den Oberflächeninhalt eines Rotationskörpers zu einer (differenzierbaren) Funktion werden wir in Satz 86.1 berechnen.

Beispiel 73.4. Wir wollen das Volumen einer n-dimensionalen abgeschlossenen Kugel vom Radius r berechnen, also von

$$B_n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n |\ \ ||\, x \,|| \leq r\}\,.$$

Wegen Satz 68.2 gilt dabei $\lambda^n(B_n(r)) \ = \ r^n \lambda^n(B_n(1))$, d.h. es geht im Wesentlichen darum, das Volumen der Einheitskugel auszurechnen.

Ihr Volumen bezeichnen wir mit $\beta_n = \lambda^n(B_n)$, zur Berechnung gehen wir induktiv vor (es ist $\beta_1 = 2$). Wir betrachten

$$B_n \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}\,.$$

Für jedes fixierte h, $-1 \leq h \leq 1$, kann man den Querschnitt als

$$\begin{aligned} T(h) &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in B_n |\, x_n = h\} \\ &= \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n |\, x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 1,\, x_n = h\} \\ &= \{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} |\, x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \leq 1 - h^2\} \\ &= B_{n-1}(\sqrt{1-h^2}) \end{aligned}$$

schreiben, d.h. als eine $(n-1)$-dimensionale Kugel vom Radius $\sqrt{1-h^2}$. Aufgrund des Cavalieri-Prinzips ist daher

$$\begin{aligned} \beta_n &= \lambda^n(B_n(1)) \\ &= (\lambda^{n-1} \otimes \lambda^1)(B_n(1)) \\ &= \int_{[-1,1]} \lambda^{n-1}(B_{n-1}(\sqrt{1-h^2}))\, d\lambda^1 \\ &= \int_{[-1,1]} (\sqrt{1-h^2})^{n-1} \lambda^{n-1}(B_{n-1}(1))\, d\lambda^1 \\ &= \lambda^{n-1}(B_{n-1}(1)) \cdot \int_{[-1,1]} (\sqrt{1-h^2})^{n-1}\, d\lambda^1 \\ &= \beta_{n-1} \cdot \int_{[-1,1]} (\sqrt{1-h^2})^{n-1}\, d\lambda^1. \end{aligned}$$

Dabei können wir das Integral rechts wegen Satz 71.5 und Korollar 32.7 über Stammfunktionen ausrechnen. Die Substitution $h = \sin t$ liefert

$$\int_{-1}^{1} (\sqrt{1-h^2})^{n-1}\, dh = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt.$$

Im Beweis zu Korollar 33.4 wurden diese Integrale berechnet; mit $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt$ gilt

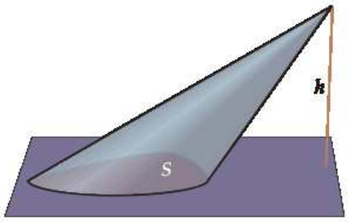
$$a_n = \begin{cases} \frac{(n-1)(n-3)\cdots 3\cdot 1}{n(n-2)\cdots 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} & \text{bei } n \text{ gerade } \geq 2\,, \\ \frac{(n-1)(n-3)\cdots 4\cdot 2}{n(n-2)\cdots 5\cdot 3} & \text{bei } n \text{ ungerade}\,. \end{cases}$$

Mit diesen Formeln und der Rekursionsvorschrift $\beta_n = 2\beta_{n-1}a_n$ kann man schließlich mit Hilfe der Fakultätsfunktion das Kugelvolumen als

$$\beta_n = \frac{\pi^{n/2}}{\mathrm{Fak}\,(n/2)}$$

schreiben. Diese Formel ergibt sich durch Induktion aus Satz 37.6.

Speziell ergibt sich für die Fläche des Einheitskreises der Wert π und für das Volumen der Einheitskugel der Wert $\frac{4}{3}\pi$.



Definition 73.5. Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ und $P \in \mathbb{R}^{n+1}$ ein Punkt. Dann nennt man die Menge

$$K_B = \{P + t(Q - P) \mid Q \in B,\, t \in [0, 1]\}$$

den *Kegel* zur Basis B mit der Spitze P.

Satz 73.6. *Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, $P \in \mathbb{R}^{n+1}$ ein Punkt und K_B der zugehörige Kegel. Es sei $h = P_{n+1}$ die letzte Koordinate von P. Dann ist K_B ebenfalls messbar, und es gilt*

$$\lambda^{n+1}(K_B) \;=\; \frac{1}{n+1}\lambda^n(B) \cdot |h|.$$

Beweis. Bei $h = 0$ liegt der gesamte Kegel in $\mathbb{R}^n$ und sein λ^n-Maß ist 0 nach Lemma 67.11, sei also $h \neq 0$. Der Durchschnitt von $K = K_B$ mit der durch $x_{n+1} = t$, t zwischen 0 und h, gegebenen Hyperebene ist

$$K(t) \;=\; \{(x_1, \ldots, x_n, t) \mid (x_1, \ldots, x_n, t) \in K_B\} \;=\; \{P + \frac{(h-t)}{h}(Q - P) \mid Q \in B\}.$$

Wegen der Translationsinvarianz und Korollar 68.3 ist dessen Volumen gleich $|\frac{h-t}{h}|^n \lambda^n(B)$. Nach dem Cavalieri-Prinzip ist also (mit $s = h - t$)

$$\begin{aligned}
\lambda^{n+1}(K_B) \;&=\; \int_0^{|h|} \lambda^n(K(s))\, ds \\
&=\; \int_0^{|h|} \lambda^n(B) \cdot (\frac{s}{|h|})^n\, ds \\
&=\; \lambda^n(B) \cdot \frac{1}{|h|^n} \cdot \int_0^{|h|} s^n\, ds \\
&=\; \lambda^n(B) \cdot \frac{1}{|h|^n} \cdot \frac{1}{n+1}|h|^{n+1} \\
&=\; \lambda^n(B) \cdot \frac{1}{n+1} \cdot |h|.
\end{aligned}$$

□

Beispiel 73.7. Wir stellen eine falsche Berechnung der Kugeloberfläche an, die auf einem falsch interpretierten Cavalieri-Prinzip beruht. Wir betrachten die obere Einheitshalbkugel. Zu jeder Höhe $h \in [0, 1]$ ist der Querschnitt der Kugeloberfläche mit der durch $z = h$ definierten Ebene eine Kreislinie mit dem Radius $\sqrt{1 - h^2}$. Der Kreisumfang eines solchen Kreises ist $2\pi\sqrt{1 - h^2}$. Wir wollen die Oberfläche der oberen Halbkugel berechnen, indem wir diese

Umfänge über die Höhe aufintegrieren. Für die Kugeloberfläche würde sich dann (mit der Substitution $h = \sin s$)

$$
\begin{aligned}
A &= 2\int_0^1 2\pi\sqrt{1-h^2}\,dh \\
&= 4\pi\int_0^1 \sqrt{1-h^2}\,dh \\
&= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 s\; ds \\
&= 4\pi\frac{1}{2}(s+\sin s\;\cos s)|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2\pi\frac{\pi}{2} \\
&= \pi^2.
\end{aligned}
$$

Der wahre Wert ist aber mit 4π deutlich größer.

Der Satz von Fubini

Es seien $(M,\mathcal{A},\mu)$ und $(N,\mathcal{B},\nu)$ zwei σ-endliche Maßräume und sei

$$f : M \times N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine messbare Funktion. Der Satz von Fubini bringt das Integral $\int_{M\times N} f\, d(\mu\otimes\nu)$ mit dem Integral über M der Funktion

$$N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ y \longmapsto \int_N f(x,y)\,d\nu(y),$$

in Verbindung. Er erlaubt es, Integrale über einem höherdimensionalen Bereich auf eindimensionale Integrale zurückzuführen. Sein Beweis beruht auf dem Cavalieri-Prinzip, angewendet auf den Produktraum $M\times N\times\overline{\mathbb{R}}$, und ist prinzipiell nicht schwierig. Allerdings muss man bei einigen Details (Nichtnegativität, Undefiniertheitsstellen, Nullmengen) doch präzise sein, so dass wir einige vorbereitende Lemmata anführen.

Eine Teilmenge $Z \subseteq M$ eines Maßraumes heißt *Nullmenge*, wenn $\mu(Z) = 0$ ist. Bspw. ist jede abzählbare Menge in $\mathbb{R}^n$ eine Nullmenge. Manchmal verwendet man diesen Begriff auch für nicht notwendigerweise messbare Teilmengen Z, für die es eine messbare Menge $Z \subseteq Z'$ gibt mit $\mu(Z') = 0$. Für eine Eigenschaft E, die für die Punkte eines Maßraumes erklärt ist, sagt man, dass die Eigenschaft *fast überall* gilt, wenn die Ausnahmemenge

$$\{x \in M \mid E(x) \text{ gilt nicht}\}$$

eine Nullmenge ist. Insbesondere spricht man von *fast überall definierten Funktionen.* Da es bei Integralen nicht auf Nullmengen des Definitionsbereiches ankommt, kann man häufig solche „kleinen“ Undefiniertheitsstellen ignorieren.

Lemma 73.8. *Es seien $(M, \mathcal{A}, \mu)$ und $(N, \mathcal{B}, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume und sei*

$$f : M \times N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine nichtnegative messbare Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Für jedes $x \in M$ sind die Funktionen*

$$N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0},\ y \longmapsto f(x,y),$$

und für jedes $y \in N$ sind die Funktionen

$$M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0},\ x \longmapsto f(x,y),$$

messbar.

(2) *Die Funktion*

$$N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0},\ y \longmapsto \int_M f(x,y)\, d\mu(x),$$

und die Funktion

$$M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0},\ x \longmapsto \int_N f(x,y)\, d\nu(y),$$

sind messbar.

(3) *Es gilt*

$$\int_{M\times N} f\, d(\mu \otimes \nu) = \int_M \left(\int_N f(x,y)\, d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_N \left(\int_M f(x,y)\, d\mu(x)\right) d\nu(y).$$

Beweis. (1) folgt direkt aus der Messbarkeit der Inklusionen

$$M \longrightarrow M \times N,\ x \longmapsto (x,y),$$

für jedes $y \in N$. (2) folgt aus Lemma 72.4. (3). Nach Satz 72.5, angewendet auf das Produkt $M \times (N \times \overline{\mathbb{R}})$, ist

$$\begin{aligned} \int_{M\times N} f\, d(\mu \otimes \nu) &= (\mu \otimes \nu \otimes \lambda^1)(S(f)) \\ &= \int_M (\nu \otimes \lambda^1)((S(f))(x))\, d\mu \\ &= \int_M \left(\int_N f(x,y)\, d\nu\right) d\mu. \end{aligned}$$

Da man die Rollen von M und N vertauschen kann, ergibt sich auch die andere Darstellung. □

Lemma 73.9. *Es seien $(M, \mathcal{A}, \mu)$ und $(N, \mathcal{B}, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume und sei*

$$f : M \times N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine messbare Funktion. Dann ist f genau dann integrierbar, wenn

$$\int_M \left(\int_N |f(x,y)|\, d\nu(y)\right) d\mu(x) \text{ oder } \int_N \left(\int_M |f(x,y)|\, d\mu(x)\right) d\nu(y)$$

endlich ist.

Beweis. Die Integrierbarkeit von f ist nach Lemma 70.5 äquivalent zur Integrierbarkeit der Betragsfunktion, was die Endlichkeit von $\int_{M\times N} |f|\, d(\mu \otimes \nu)$ bedeutet. Die Aussage folgt daher aus Lemma 73.8. □

Wir kommen nun zum *Satz von Fubini.*

SATZ 73.10. *Es seien $(M, \mathcal{A}, \mu)$ und $(N, \mathcal{B}, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume und sei*

$$f : M \times N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine integrierbare Funktion. Dann sind die beiden Funktionen

$$M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ x \longmapsto \int_N f(x,y)\, d\nu(y),$$

und

$$N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ y \longmapsto \int_M f(x,y)\, d\mu(x),$$

fast überall reellwertig und fast überall integrierbar, und es gilt

$$\int_{M\times N} f\, d(\mu\otimes\nu) = \int_M (\int_N f(x,y)\, d\nu(y))\, d\mu(x) = \int_N (\int_M f(x,y)\, d\mu(x))\, d\nu(y)$$

Beweis. Nach Voraussetzung und nach Lemma 73.9 ist die Funktion $x \mapsto \int_N |f(x,y)|\, d\nu(y)$ integrierbar. Dies bedeutet insbesondere, dass das Integral $\int_N |f(x,y)|\, d\nu(y)$ fast überall einen endlichen Wert hat, dass es also eine Nullmenge $Z \subseteq M$ gibt mit $\int_N |f(x,y)|\, d\nu(y) < \infty$ für $x \notin Z$. Daher sind nach Lemma 70.5 für $x \notin Z$ die Integrale $\int_N f(x,y)\, d\nu(y)$ definiert und endlich, und dies gilt ebenso für die positiven und negativen Teile $f_+(x,y)$ und $f_-(x,y)$.

Da sich Integrale nicht ändern, wenn man im Integrationsgebiet eine Nullmenge weglässt, und da $Z \times N$ eine Nullmenge in der Produktmenge ist, kann man M durch $M \setminus Z$ ersetzen. Wir schreiben

$$\begin{aligned} & \int_{M\times N} f\, d(\mu\otimes\nu) \\ = & \int_{M\times N} (f_+ - f_-)\, d(\mu\otimes\nu) \\ = & \int_{M\times N} f_+\, d(\mu\otimes\nu) - \int_{M\times N} f_-\, d(\mu\otimes\nu) \end{aligned}$$

und wenden auf die beiden Summanden Lemma 73.8 an, so dass dies gleich

$$\begin{aligned} = & \int_M (\int_N f_+(x,y)\, d\nu(y))\, d\mu(x) - \int_M (\int_N f_-(x,y)\, d\nu(y))\, d\mu(x) \\ = & \int_M (\int_N (f_+(x,y) - f_-(x,y))\, d\nu(y))\, d\mu(x) \\ = & \int_M (\int_N f(x,y)\, d\nu(y))\, d\mu(x) \end{aligned}$$

ist. □

Abbildungsverzeichnis