Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 9

Aufwärmaufgabe

Aufgabe 9.1. Beschreibe

$$K[X,Y,Z]/(XY - Z^n)$$

als Monoidring und als neutrale Stufe eines Polynomrings in einer geeigneten Graduierung.

Aufgabe 9.2. Bestimme das Monoid und den Monoidring, das durch den Kegel

$$C = \{av + bw \mid a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$

mit $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ bestimmt ist. Finde eine Graduierung auf $K[X,Y]$ derart, dass der Monoidring der Ring der neutralen Stufe ist.

Aufgabe 9.3. Es sei $M \subseteq \Gamma = \mathbb{Z}^n$ ein normales, spitzes Monoid, wobei Γ das Differenzengitter zu M sei. Es sei $C = \mathbb{R}_{\geq} M \subseteq \mathbb{R}^n$ der zugehörige rationale Kegel. Zeige, dass bei $n = 2$ dieser Kegel durch zwei Halbräume (bzw. Linearformen) beschreibbar ist, und dass bei $n = 3$ jede Anzahl an Halbräumen $r \geq n$ auftreten kann.

Die beiden nächsten Aufgaben machen zwei Extremfälle von Satz 9.5 (4) explizit.

Aufgabe 9.4. Es sei K ein Körper und $d_1, \ldots, d_r$ seien ganze Zahlen. Zeige, dass die Zuordnung

$$\mu_\ell(K) \longrightarrow \mathrm{GL}_r(K),\, t \longmapsto \begin{pmatrix} t^{d_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & t^{d_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t^{d_{r-1}} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & t^{d_r} \end{pmatrix},$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 9.5. Es sei K ein Körper und seien $\ell_1, \ldots, \ell_a$ natürliche Zahlen und $d_1, \ldots, d_{a+b}$ ganze Zahlen. Zeige, dass die Zuordnung

$$\mu_{\ell_1}(K) \times \cdots \times \mu_{\ell_a}(K) \times \left(K^\times\right)^b \longrightarrow \mathrm{GL}_1(K) \cong K^\times,\ (t_1, \ldots, t_{a+b}) \longmapsto t_1^{d_1} \cdots t_{a+b}^{d_{a+b}},$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 9.6. Bestimme zur durch einen Gruppenhomomorphismus

$$\delta\colon\ \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}/(3)$$

bestimmten $\mathbb{Z}/(3)$-Graduierung auf $K[U,V]$ den Ring der neutralen Stufe in Abhängigkeit von δ.

Aufgabe 9.7. Es sei K ein Körper und A eine $\mathbb{Z}$-graduierte K-Algebra, auf der eine Gruppe G als Gruppe von homogenen K-Algebrahomomorphismen operiere. Zeige

$$\left(A^{(s)}\right)^G = \left(A^G\right)^{(s)}.$$

Aufgabe 9.8. Zeige, dass der Veronese-Ring $K[U,V]^{(s)}$ als K-Algebra durch $s+1$ Elemente $Z_0, Z_1, \ldots, Z_s$ erzeugt wird derart, dass sämtliche 2×2-Minoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & \ldots & Z_{s-2} & Z_{s-1} \\ Z_1 & Z_2 & \ldots & Z_{s-1} & Z_s \end{pmatrix}$$

Relationen zwischen diesen Erzeugern sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 9.9. (2 Punkte)

Es sei $A = \bigoplus_{d \in D} A_d$ ein graduierter kommutativer Ring und es sei A_e eine Stufe, die eine Einheit enthalte. Zeige, dass A_e als A_0-Modul isomorph zu A_0 ist.

Aufgabe 9.10. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel eines Untermonoids $M \subseteq \mathbb{N}^2$, das nicht endlich erzeugt ist.

Aufgabe 9.11. (3 Punkte)

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0. Bestimme in der Situation von Aufgabe 9.5 den Invariantenring der zugehörigen Operation auf dem Polynomring.

Aufgabe 9.12. (3 Punkte)

Bestimme die minimale Anzahl eines Erzeugendensystems für den Veronese-Ring $K[X_1, \ldots, X_n]^{(s)}$.