Zahlentheorie (Osnabrück SS 2008)

Arbeitsblatt 22

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Man definiert die Nenneraufnahme

$$R_S$$

schrittweise wie folgt. Es sei zunächst M die Menge der formalen Brüche mit Nenner in S, also

$$M = \{\tfrac{r}{s},\, r \in R,\, s \in S\} \ .$$

Zeige, dass durch

$$\tfrac{r}{s} \sim \tfrac{r'}{s'} \text{ genau dann, wenn es ein } t \in S \text{ gibt mit } trs' = tr's$$

eine Äquivalenzrelation auf M definiert ist. Wir bezeichnen mit R_S die Menge der Äquivalenzklassen. Definiere auf R_S eine Ringstruktur und definiere einen Ringhomomorphismus $R \to R_S$.

Aufgabe 2. (3 Punkte)

Seien R und A kommutative Ringe und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Es sei $\varphi : R \to A$ ein Ringhomomorphismus derart, dass $\varphi(s)$ eine Einheit in A ist für alle $s \in S$. Zeige: dann gibt es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus

$$\tilde{\varphi} : R_S \longrightarrow A \ ,$$

der φ fortsetzt.

Aufgabe 3. (1 Punkt)

Sei R ein kommutativer Ring. Zeige, dass die Menge aller Nichtnullteiler in R ein multiplikatives System bildet.

Aufgabe 4. (2 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und $f \in R$. Zeige, dass f nilpotent ist genau dann, wenn die Nenneraufnahme $R_f = 0$ ist.

Aufgabe 5. (2 Punkte)

Sei D eine quadratfreie Zahl, sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ und sei A_D der zugehörige Ganzheitsring. Zeige, dass nach Nenneraufnahme von 2 ein Isomorphismus

$$R_2 \longrightarrow (A_D)_2$$

vorliegt.

Aufgabe 6. (4 Punkte)

Seien n und k teilerfremde Zahlen und sei $\mathbb{Z} \subseteq R$ ein kommutativer Ring. Dann gibt es eine Isomorphie

$$R/(n) \cong (R_k)/(n) \ .$$

Aufgabe 7. (4 Punkte)

Sei R ein normaler Integritätsbereich und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass auch R_S normal ist.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Sei R ein Integritätsbereich, sei $f \in R$ und sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal. Zeige, dass $f \in \mathfrak{a}$ ist genau dann, wenn für alle Lokalisierungen $R_{\mathfrak{p}}$ gilt, dass $f \in \mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}$ ist.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Sei D eine quadratfreie Zahl, sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ und sei A_D der zugehörige Ganzheitsring. Zeige, dass für jede ungerade Primzahl p ein Isomorphismus

$$\mathbb{Z}[\sqrt{D}]/(p) \longrightarrow (A_D)/(p)$$

vorliegt. Zeige durch ein Beispiel, dass dies bei $p = 2$ nicht sein muss.

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Sei R ein Integritätsbereich und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass die Primideale in R_S genau denjenigen Primidealen in R entsprechen, die mit S einen leeren Durchschnitt haben.

Aufgabe 11. (2 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring. Zeige, dass R genau dann ein lokaler Ring ist, wenn $a + b$ nur dann eine Einheit ist, wenn a oder b eine Einheit ist.

Aufgabe 12. (3 Punkte)

Beweise für einen diskreten Bewertungsring die Eigenschaften der Ordnung, die in Lemma 22.14 formuliert sind.