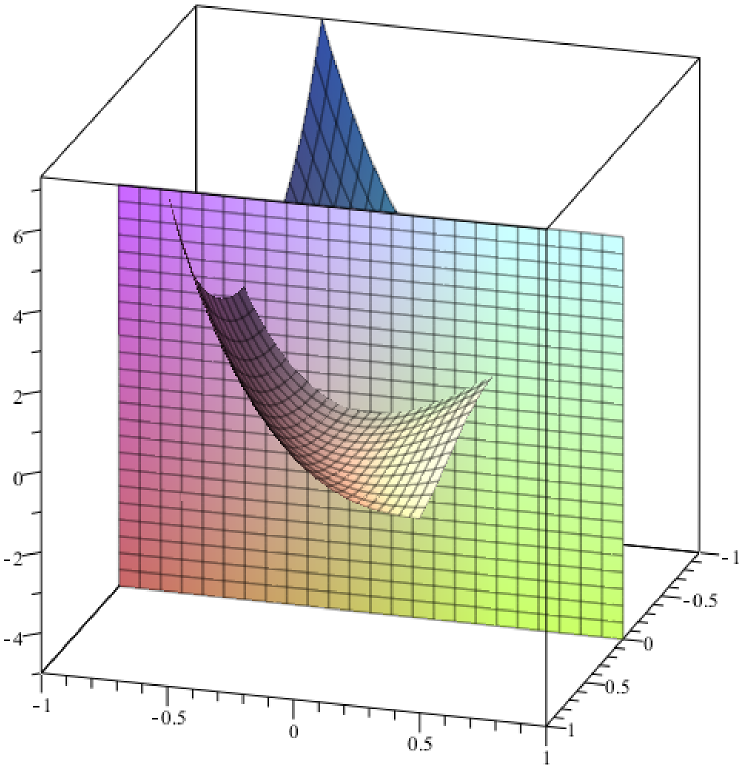
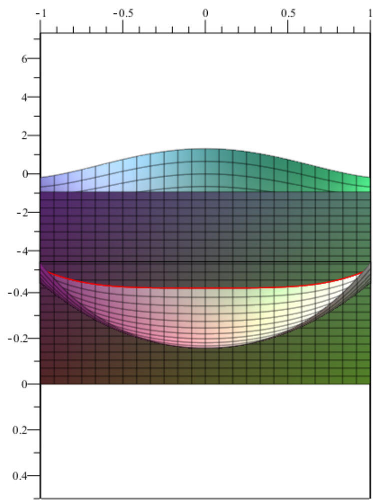
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (x^2 + (y-1)^2 - 1)(x^2 + (y-2)^2 - 4)$$

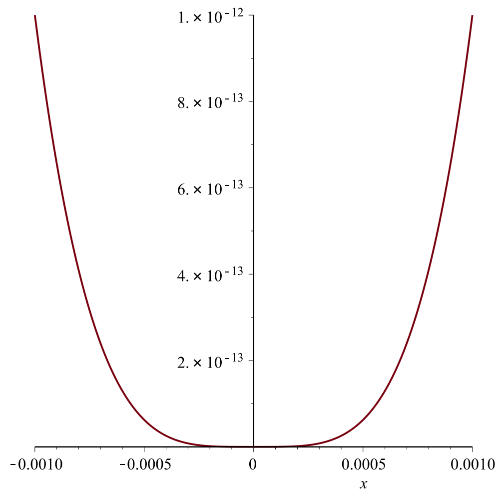
Der Graph von f geschnitten von der yz-Ebene:



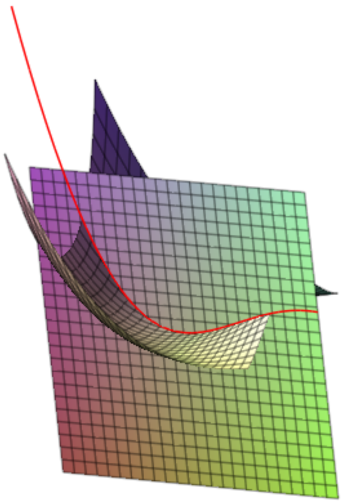

Dass diese Schnittkurve im Nullpunkt ein Minimum besitzt, ist in der Grafik gut erkennbar. Betrachtet man den Schnitt der um $\frac{\pi}{2}$ bzgl. der z-Achse gedrehten Funktion mit der gleichen Ebene ist nicht gleich ersichtlich, dass der Schnitt ein Minimum im Nullpunkt besitzt. Die Schnittkurve wird durch die Funktion $s_1$ beschrieben, die bekanntermaßen im Nullpunkt ein Minimum besitzt:

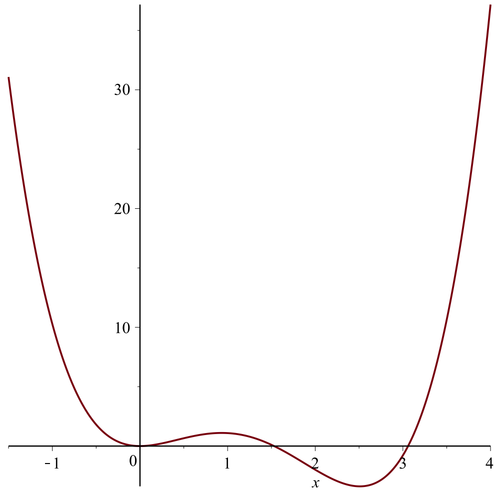
$$s_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3; t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t^4 \end{pmatrix}$$





Was passiert, wenn die Schnittebene um einen Winkel ε (im Beispiel 0.7rad) gedreht wird? Hier ist ebenfalls nicht klar erkennber, ob der Schnitt im Nullpunkt ein Minimum besitzt. Betrachtet man allerdings die Schnittkurve, wird erkennbar, dass auch dieser Schnitt im Nullpunkt ein Minimum aufweist:





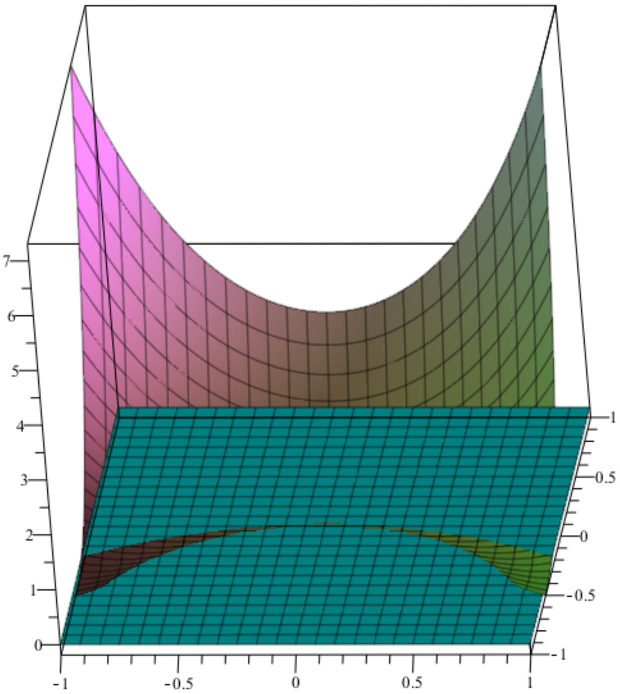

Der Schnitt der um einen Winkel ε gedrehten Funktion mit der yz-Ebene wird durch s beschrieben:

$$s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3; t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ ((t\sin\varepsilon)^2 + (t\cos\varepsilon-1)^2 - 1)((t\sin\varepsilon)^2 + (t\cos\varepsilon-2)^2 - 4) \end{pmatrix}$$

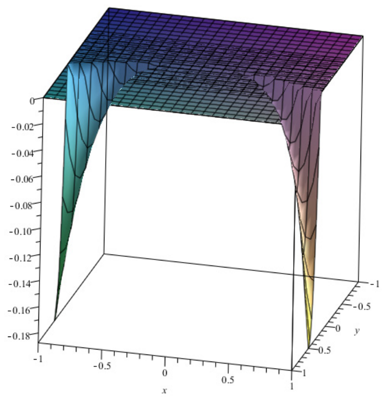
Da erst die quadratische Taylor-Näherung um t=0 nicht verschwindet, bestimmt diese das lokale Verhalten der Schnittkurve um den Nullpunkt. Da diese positiv in einer Umgebung um den Nullpunkt ist, besitzt jede Schnittkurve im Koordinatenursprung ein Minimum:

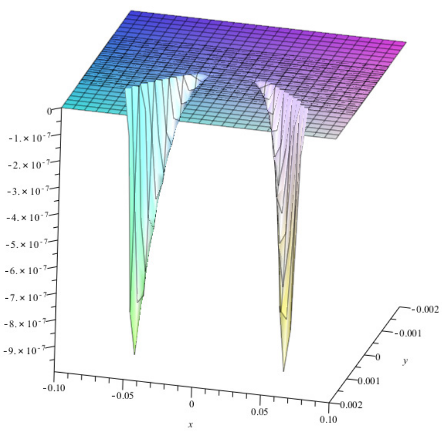
$$s \approx \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 8(t\cos\varepsilon)^2 \end{pmatrix}$$

Obwohl jede Schnittkurve im Nullpunkt ein Minimum zeigt, weist die Funktion insgesamt kein Extremum auf (der Funktionsgraph überschreitet in jeder Umgebung um den Nullpunkt die eingezeichnete xy Ebene):

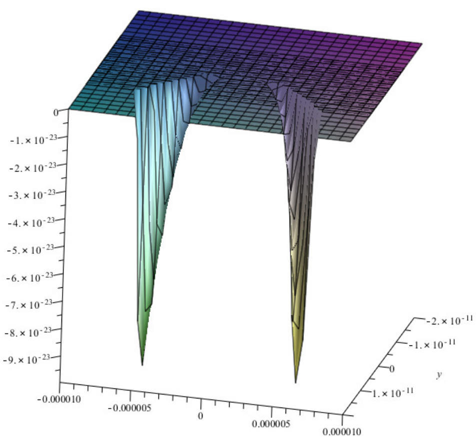



Der Bereich, der durch die Ebene ragt:




1.000% Vergrößerung




1.000.000% Vergrößerung