Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Vorlesung 37

Vergleichskriterien mit Reihen

LEMMA 37.1. *Sei $I = [1, \infty]$ ein rechtsseitig unbeschränktes Intervall und sei*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige fallende Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$. Dann existiert das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty f(t)\, dt$$

genau dann, wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty f(n)$$

konvergiert.

Beweis. Wenn das uneigentliche Integral existiert, so betrachten wir die Abschätzung

$$\sum_{n=2}^k f(n) \leq \int_1^k f(t)\, dt\,,$$

die darauf beruht, dass die linke Seite das Treppenintegral zu einer unteren Treppenfunktion für f auf $[1, k]$ ist. Da die rechte Seite beschränkt ist, gilt dies auch für die linke Seite, so dass wegen $f(n) \geq 0$ die Reihe konvergiert. Ist umgekehrt die Reihe konvergent, so betrachten wir die Abschätzung

$$\int_1^k f(t)\, dt \leq \sum_{n=1}^k f(n)\,,$$

die gilt, da die rechte Seite das Treppenintegral zu einer oberen Treppenfunktion ist. Wegen $f(t) \geq 0$ ist die Integralfunktion $x \mapsto \int_1^x f(t)\, dt$ wachsend und beschränkt, da die rechte Seite wegen der Konvergenz der Reihe beschränkt ist. Daher besitzt die Integralfunktion für $x \mapsto \infty$ einen Grenzwert und das uneigentliche Integral existiert. $\square$

BEISPIEL 37.2. Die Funktion

$$f : [1, \infty] \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto \frac{1}{t},$$

ist streng fallend. Daher ist die Funktion g, die für x mit $k \leq x < k+1$ durch $\frac{1}{k}$ definiert ist, eine Majorante für f, also $g(t) \geq f(t)$. Auf jedem Intervall $[1, n]$ liefert g eine obere Treppenfunktion zu f. Ebenso liefert die durch $\frac{1}{k+1}$

bei $k \leq x < k+1$ definierte Funktion h eine untere Treppenfunktion für f. Daher gelten die Abschätzungen

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \geq \int_1^n \frac{1}{t}\, dt \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}\,.$$

Das Integral in der Mitte besitzt den Wert $\ln n$. Die Differenz zwischen der linken und der rechten Summe ist $1 - \frac{1}{n}$. Daher ist die Differenz

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n$$

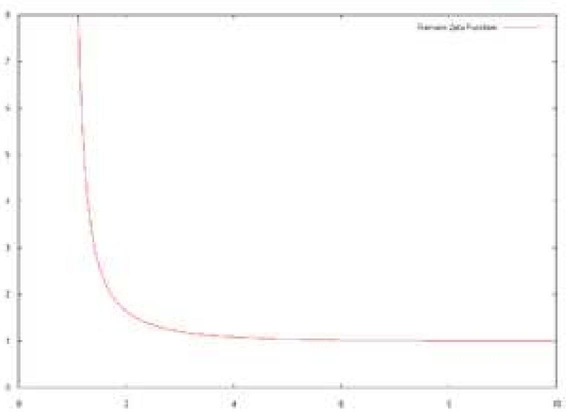
für jedes n positiv, mit n wachsend und nach oben beschränkt. Daher existiert für $n \to \infty$ der Limes, und dieser Limes ändert sich nicht, wenn man vorne in der Summe bis n aufsummiert anstatt bis $n-1$. Wir setzen

$$\gamma := \lim_{n \to \infty} (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n)$$

und nennen sie die *eulersche Konstante* (oder *Mascheronische Konstante*). Ihr nummerischer Wert ist ungefähr

$$\gamma = 0,5772156649\ldots\,.$$

Es ist ein offenes mathematisches Problem, ob diese Zahl rational ist oder nicht.



Die Riemannsche Zeta-Funktion im Reellen

Nach Beispiel 36.8 existiert für $c < -1$ das uneigentliche Integral $\int_1^\infty t^c\, dt$, so dass aufgrund von Lemma 37.1, auch die Reihen $\sum_{n=1}^\infty n^c = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{-c}}$ konvergieren. Daher ist die folgende Funktion wohldefiniert.

Definition 37.3. Die *Riemannsche ζ-Funktion* ist für $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 1$ definiert durch

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}\,.$$

Diese Funktion lässt sich komplex fortsetzen und spielt eine wichtige Rolle in der Zahlentheorie.

Die Fakultätsfunktion

Beispiel 37.4. Sei $x > -1$. Wir betrachten die Funktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto t^x e^{-t}.$$

Wir behaupten, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt$$

existiert. Für den rechten Rand (also ∞) betrachten wir eine natürliche Zahl $n \geq x$. Da die Exponentialfunktion schneller wächst als jede Polynomfunktion, gibt es ein $a \in \mathbb{R}_+$ derart, dass $t^n e^{-\frac{t}{2}} \leq 1$ gilt für alle $t \geq a$. Daher ist

$$\begin{aligned}\int_a^b t^x e^{-t}\, dt &\leq \int_a^b t^n e^{-t}\, dt \\ &= \int_a^b t^n e^{-\frac{t}{2}} e^{-\frac{t}{2}}\, dt \\ &\leq \int_a^b e^{-\frac{t}{2}}\, dt \\ &= 2(e^{-\frac{a}{2}} - e^{-\frac{b}{2}}) \leq 2e^{-\frac{a}{2}}.\end{aligned}$$

Für $b \to \infty$ wächst das linke Integral und ist durch $2e^{-\frac{a}{2}}$ beschränkt, so dass der Grenzwert existiert. Für das Verhalten am linken Rand (das nur bei $-1 < x \leq 0$ problematisch ist) müssen wir wegen $e^{-t} \leq 1$ nach Lemma 36.6 nur $\int_0^1 t^x\, dt$ betrachten. Die Stammfunktion davon ist $\frac{1}{x+1} t^{x+1}$, deren Exponent positiv ist, so dass der Limes für $t \to 0$ existiert.

Das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt$$

existiert also für $x \in \mathbb{R},\ x > -1$. Dies ist der Ausgangspunkt für die Definition der Fakultätsfunktion.

Definition 37.5. Für $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, heißt die Funktion

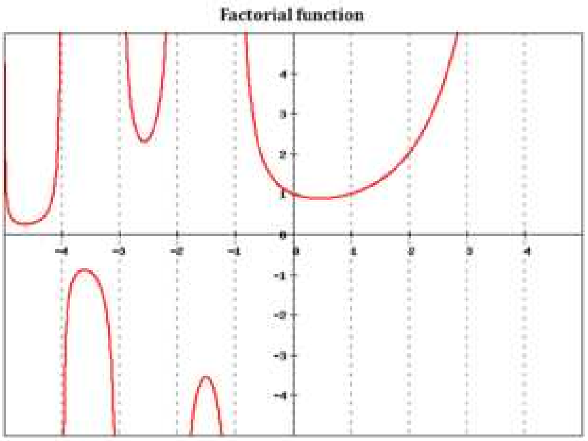
$$x \mapsto \operatorname{Fak}(x) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt$$

die *Fakultätsfunktion*.

Die durch

$$\Gamma(x) := \operatorname{Fak}(x-1) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

definierte Funktion heißt *Gamma-Funktion*, mit der häufiger gearbeitet wird. Mit der Fakultätsfunktion werden aber die Formeln etwas schöner und insbesondere wird der Zusammenhang zur Fakultät noch deutlicher, der in der folgenden Aussage aufgezeigt wird.



SATZ 37.6. *Die Fakultätsfunktion besitzt die folgenden Eigenschaften.*

(1) $\operatorname{Fak}(x) = x \cdot \operatorname{Fak}(x-1)$ *für* $x > 0$.
(2) $\operatorname{Fak}(0) = 1$.
(3) $\operatorname{Fak}(n) = n!$ *für natürliche Zahlen* $n \in \mathbb{N}$.
(4) $\operatorname{Fak}(-\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Beweis. (1) Mittels partieller Integration ergibt sich (für reelle Zahlen $b \geq a > 0$ bei fixiertem $x > 0$)

$$\begin{aligned} \int_a^b t^x e^{-t}\, dt &= -t^x e^{-t}|_a^b + \int_a^b x t^{x-1} e^{-t}\, dt \\ &= -b^x e^{-b} + a^x e^{-a} + x \cdot \int_a^b t^{x-1} e^{-t}\, dt. \end{aligned}$$

Für $b \to \infty$ geht $b^x e^{-b} \to 0$ und für $a \to 0$ geht $a^x e^{-a} \to 0$ (da x positiv ist). Wendet man auf beide Seiten diesen Grenzwertprozess an, so erhält man $\operatorname{Fak}(x) = x \cdot \operatorname{Fak}(x-1)$. (2). Es ist

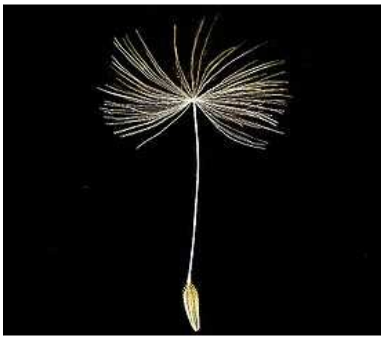
$$\operatorname{Fak}(0) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = -e^{-t}|_0^\infty = 1.$$

(3) folgt aus (1) und (2) durch Induktion. (4). Es ist

$$\operatorname{Fak}(-\frac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt = 2\int_0^\infty e^{-s^2}\, ds = \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2}\, ds = \sqrt{\pi}.$$

Dies ergibt sich mit der Substitution $t = s^2$ und dem sogenannten Fehlerintegral. $\square$

Gewöhnliche Differentialgleichungen



Welche Bewegung vollzieht ein Löwenzahnfallschirmchen? Das Fallschirmchen lässt sich zu jedem Zeitpunkt von dem Wind tragen, der an der Stelle herrscht, wo es sich gerade befindet. Der Wind, seine Stärke und seine Richtung, hängt sowohl von der Zeit als auch vom Ort ab. Das bedeutet, dass hier ein gewisser „Rückkopplungsprozess“ vorliegt: Die bisherige Bewegung (also die Vergangenheit) bestimmt, wo sich das Fallschirmchen befindet und damit auch, welcher Wind auf es einwirkt und damit den weiteren Bewegungsablauf. Solche Bewegungsprozesse werden durch Differentialgleichungen beschrieben.

Differentialgleichungen sind ein fundamentaler Bestandteil der Mathematik und der Naturwissenschaften. Sie drücken eine Beziehung zwischen einer abhängigen Größe und der Änderung dieser Größe aus. Viele Gesetzmäßigkeiten in der Natur wie Bewegungsprozesse, Ablauf von chemischen Reaktionen, Wachstumsverhalten von Populationen werden durch Differentialgleichungen beschrieben. Hier besprechen wir nur solche Differentialgleichungen, die durch Integration gelöst werden können.

Definition 37.7. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und es sei

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

eine Funktion. Dann nennt man

$$y' = f(t, y)$$

die (gewöhnliche) *Differentialgleichung* zu f (oder zum *Vektorfeld* oder zum *Richtungsfeld* f).

Dabei ist $y' = f(t, y)$ erstmal nur ein formaler Ausdruck, dem wir aber sofort eine inhaltliche Interpretation geben. Das y soll eine Funktion repräsentieren und y' ihre Ableitung. Dies wird präzisiert durch den Begriff der *Lösung einer Differentialgleichung*.

Definition 37.8. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und es sei

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

eine Funktion. Zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

heißt eine Funktion

$$y : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto y(t),$$

auf einem (mehrpunktigen) Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ eine *Lösung der Differentialgleichung*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.

(1) Es ist $(t, y(t)) \in U$ für alle $t \in I$.
(2) Die Funktion y ist differenzierbar.
(3) Es ist $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in I$.

Differentialgleichungen beschreiben häufig physikalische Prozesse, insbesondere Bewegungsprozesse. Daran soll auch die Notation erinnern, es steht t für die Zeit und y für den Ort. Dabei ist hier der Ort eindimensional, d.h. die Bewegung findet nur auf einer Geraden statt. Den Wert $f(t, y)$ sollte man sich als eine zu einem Zeit- und Ortspunkt vorgegebene Richtung auf der Ortsgeraden vorstellen. Eine Lösung ist dann eine Funktion

$$y : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto y(t),$$

die differenzierbar ist und deren Ableitung, vorgestellt als Momentangeschwindigkeit, zu jedem Zeitpunkt t mit dem durch $f(t, y(t))$ gegebenen Richtungsvektor übereinstimmt. Später werden wir auch Bewegungen betrachten, die sich in der Ebene oder im Raum abspielen, und die durch ein entsprechendes Richtungsfeld gesteuert werden.

Definition 37.9. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und es sei

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

eine Funktion. Es sei $(t_0, y_0) \in U$ gegeben. Dann nennt man

$$y' = f(t, y) \text{ und } y(t_0) = y_0$$

das *Anfangswertproblem* zur gewöhnlichen Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ mit der *Anfangsbedingung* $y(t_0) = y_0$.

Definition 37.10. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und es sei

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

eine Funktion. Es sei $(t_0, y_0) \in U$ gegeben. Dann nennt man eine Funktion

$$y : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto y(t),$$

auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ eine *Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = f(t, y) \text{ und } y(t_0) = y_0\,,$$

wenn y eine Lösung der Differentialgleichung ist und wenn zusätzlich

$$y(t_0) = y_0$$

gilt.

Es gibt kein allgemeines Verfahren eine solche Differentialgleichung bzw. Anfangswertproblem explizit zu lösen. Die Lösbarkeit hängt wesentlich von der gegebenen Funktion $f(t, y)$ ab.

Das eine Differentialgleichung beschreibende Vektorfeld $f(t, y)$ hängt im Allgemeinen von beiden Variablen t und y ab. Einfache, aber keineswegs triviale Spezialfälle von Differentialgleichungen liegen vor, wenn das Vektorfeld nur von einer der beiden Variablen abhängt.

Definition 37.11. Eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

heißt *ortsunabhängig*, wenn die Funktion f nicht von y abhängt, wenn also $f(t, y) = g(t)$ gilt mit einer Funktion g in der einen Variablen t.

Eine ortsunabhängige gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = g(t)$$

zu einer stetigen Funktion g ist nichts anderes als das Problem, eine Stammfunktion $G(t)$ von g zu finden; eine Lösung y der Differentialgleichung ist ja genau durch die Bedingung ausgezeichnet, dass $y'(t) = g(t)$ ist. Da eine Stammfunktion nur bis auf die Integrationskonstante bestimmt ist, besitzt ein ortsunabhängiges Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung.

Definition 37.12. Eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

heißt *zeitunabhängig*, wenn die Funktion f nicht von t abhängt, wenn also $f(t, y) = h(y)$ gilt mit einer Funktion h in der einen Variablen y.

Bei einer zeitunabhängigen Differentialgleichung hängt nur das zugrunde liegende Vektorfeld nicht von der Zeit ab, die Lösungskurven sind hingegen im Allgemeinen zeitabhängig.

Abbildungsverzeichnis